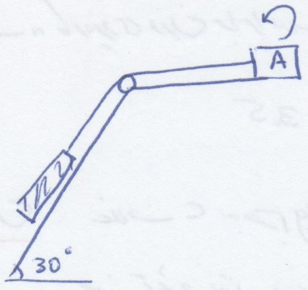
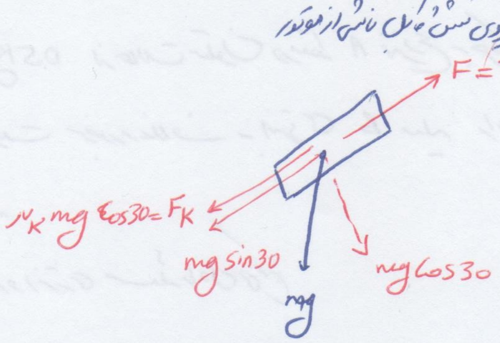
حل: ابتدا دیاگرام آزاد کنده درجهت را می‌کشیم





$P_{موتور} = 4KW = 4000\ J/s$

$V = 1.2 m/s$

$P = F.V \longrightarrow F = T = \frac{P}{V} = \frac{4000}{1.2} = 3333.33\ N$

سرعت ثابت است پس شتاب صفر است ← نیروها در تعادلند

$\sum F = 0$

$\longrightarrow \mu_K mg\cos30 + mg\sin30 = T$

$\longrightarrow \mu_K \times 360 \times 9.81 \times \cos30 + 360 \times 9.81 \sin30 = 3333.33\ N \longrightarrow \mu_K = 0.51$

ب. $a = ? \longleftarrow P = 6KW$

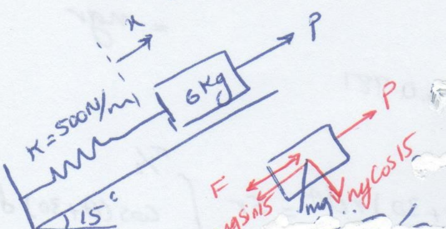
$P = 6KW = 6000\ W$

حطای $V = 1.2$

$F = T = \frac{P}{V} = \frac{6000}{1.2} = 5000$

$\sum F = ma \longrightarrow \overset{T}{5000} - \mu_K mg\cos30 - mg\sin30 = ma \longrightarrow a = 4.63\ m/s^2$

مثال: ارابه شکل زیر را در نظر بگیرید. در موقعیت $x=0$، فنر فاقد کشیدگی است. تحت تاثیر نیروی P، ارابه از موقعیت اولیه $x_1 = -150mm$ به موقعیت نهایی $x_2 = 80mm$ حرکت می‌کند. الف - کار انجام شده توسط فنر بر روی ارابه را تعیین کنید
ب - کار انجام شده بر روی ارابه توسط نیروی وزن آن را محاسبه کنید



حل: الف - [redacted]

کار نیروی فنر از -0.15 تا 0 مثبت است و از 0 تا 0.08 منفی است (به خاطر جهت حرکت)

[redacted]

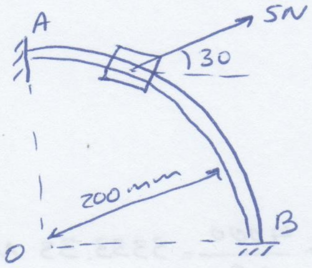
حل: الف -

$U_{فنر} = \int_{-0.15}^{0.08} -Kx\,dx = \int_{-0.15}^{0.08} -500x\,dx = -250x^2\Big]_{-0.15}^{0.08} = 4.02\ J$

— به کار نیروی وزن برابر است با مؤلفه ای از این نیرو که در راستای حرکت است x جابجایی

$$U = -mg\sin 15 \times (0.080 + 0.15) = -6 \times 9.81 \times \sin 15 \times 0.23 = 3.5$$

مثال: غلاف C به جرم 0.5kg از حالت سکون در نقطه A تحت اثر حرکت می کند و با اصطکاک ناچیز روی میله ثابت خمیده در صفحه قائم می لغزد. سرعت برخورد غلاف به انتهای B میله را در صورتی بیابید که نیروی 5N با امتداد ثابت در آن اثر می کند.



حل: در این روش کار و انرژی مسئله را حل می کنیم

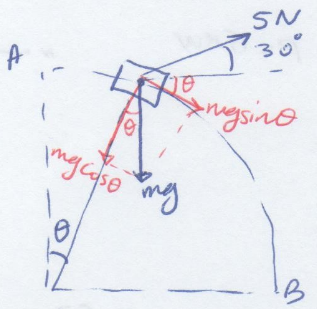
$$U_{A-B} = \Delta T = \frac{1}{2} m (V_B^2 - V_A^2)$$

V_A برابر صفر است، V_B را می خواهیم. پس باید کاری که نیروهای وارد بر جسم

در فاصله ی A تا B انجام می دهند را بدست آوریم. از آن جا که اصطکاک غلاف و میله ناچیز است پس

لازم است فقط کار دو نیروی وزن و 5N را بدست آوریم. می دانیم که کار برابر است با مؤلفه ی نیرو در جهت جابجایی x جابجایی

اگر غلاف را در موقعیت θ از محور OA در نظر بگیریم، نیروهای در جهت حرکت به صورت زیر هستند



مؤلفه وزن در راستای حرکت $= mg\sin\theta$

مؤلفه ی نیروی 5N در راستای حرکت $= 5 \times \cos(\theta + 30)$

$$du = F dr$$

$$\longrightarrow \int du = \int F dr$$

اگر فرض کنیم که غلاف به اندازه ی dr در مسیر حرکت کند، کار نیروهای وارد بر آن در فاصله ی dr را پیدا می کنیم و سپس انتگرال می گیریم

$dr = r d\theta$ می شود

کار نیروی وزن در A تا B

$$\int du = \int_A^B mg\sin\theta\, dr = \int_0^{\pi/2} mg\sin\theta \times r\, d\theta = mgr \int_0 \sin\theta\, d\theta = -mgr\cos\theta \Big]_0^{\pi/2} = mgr$$

$$\longrightarrow \text{کار نیروی وزن} = mgr = 0.5 \times 9.81 \times 0.2 = 0.981$$

کار نیروی 5N در A تا B

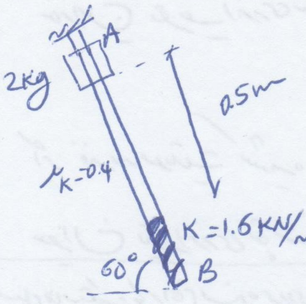
$$\int du = \int_A^B 5\cos(\theta+30)\, dr = 5 \int_0^{\pi/2} \cos(\theta+30)\, r\, d\theta = 5r \int_0^{\pi/2} \cos(\theta+30)\, d\theta$$

$$= 5r \sin(\theta+30) \Big]_0^{\pi/2} = 0.366$$

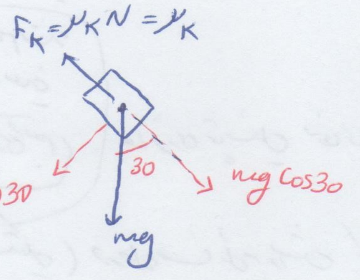
مجموع کارهای انجام شده $= U_{A-B} = 0.981 + 0.366 = 1.347$

$$U_{A-B} = \frac{1}{2} m (V_B^2 - V_A^2) \Rightarrow 1.347 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times V_B^2 \longrightarrow V_B = 2.32\ m/s$$

مثال: غلافی به جرم 2kg از حالت سکون در نقطه A رها می‌شود و در امتداد میله ثابت شیبدار در صفحه قائم فرو می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی 0.4 است. سرعت برخورد غلاف به فنر را حساب کنید.



حل: از روش کار و انرژی استفاده می‌کنیم. دو نیرو هستند که به غلاف وارد می‌شوند و کار انجام می‌دهند. یکی نیروی اصطکاک برخلاف جهت حرکت است و دیگری نیروی وزن (مؤلفه‌ای از وزن که در راستای حرکت است). بنابراین ابتدا دیاگرام آزاد غلاف را می‌کشیم.

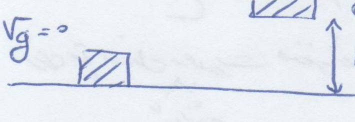


$$U_{A-B}=\Delta T=(mg\cos 30-\mu_K mg\sin 30)\times 0.5m=(2\times 9.81\cos 30-0.4\times 2\times 9.81\times\sin 30)\times 0.5$$

$$\longrightarrow U_{A-B}=6.53J=\frac{1}{2}m(V_B^2-V_A^2)=\frac{1}{2}\times 2\times V_B^2\longrightarrow V_B=2.56\,m/s$$

انرژی پتانسیل: { گرانشی / الاستیک

گرانشی: هنگامی که جسمی از سطح به ارتفاع h از زمین می‌رود، انرژی تحت عنوان انرژی پتانسیل وزن ذخیره می‌شود (انرژی پتانسیل گرانشی V_g) زیرا برای غلبه بر نیروی وزن آن در این ارتفاع می‌بایست کار انجام شود و این کار به صورت انرژی در داخل جسم ذخیره می‌شود. در واقع mgh همان کار انجام شده برای مقابله با نیروی گرانشی mg است. پس در واقع انرژی پتانسیل گرانشی همان کار نیروی وزن است با علامت منفی. یعنی اگر جسمی از سطح زمین به ارتفاع h برود کار انجام شده توسط نیروی وزن برابر می‌شود با:



کار نیروی وزن $= -mg\times\underbrace{h}_{\text{جابجایی نیرو}}$

نیرو برخلاف جهت حرکت

$\boxed{V_g=+mgh}$ ← و چون انرژی پتانسیل گرانشی برای غلبه بر همین کار نیروی وزن است

انرژی پتانسیل گرانشی

حال اگر جسم از ارتفاع h_1 به ارتفاع بالاتر h_2 برود، کار نیروی وزن برابر می‌شود با $W_{\text{وزن}}=-mg(h_2-h_1)$

و $\underbrace{\text{انرژی پتانسیل ذخیره شده جدید}}_{\text{تغییر انرژی پتانسیل}}$ در جسم برابر است با $mg(h_2-h_1)$

پس

$$\boxed{\text{انرژی پتانسیل گرانشی} = -\ \text{کار نیروی وزن}}$$

انرژی پتانسیل الاستیک :

انرژی پتانسیل الاستیک برای فنر تعریف می‌شود و عبارت است از کار انجام شده بر روی فنر برای آنکه به اندازه x تغییر طول دهد

بنابراین تعریف انرژی پتانسیل الاستیک از طریق زیر بدست می‌آید.

انرژی پتانسیل الاستیک

$$\boxed{V_e = \int^{x} Kx\,dx = \frac{1}{2}Kx^2}$$

اگر فنر در موقعیت کشیده یا فشرده x_1 باشد و با انجام کار بر روی آن میزان کشیدگی یا فشردگی آن را به x_2 برسانیم آنگاه میزان تغییر انرژی پتانسیل الاستیک ذخیره شده در آن برابر است با:

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}K(x_2^2 - x_1^2)$$

$$V_{e_2} = \frac{1}{2}Kx_2^2$$ انرژی پتانسیل نهایی آن

* انرژی پتانسیل الاستیک، کار انجام شده بر روی فنر است. کار انجام شده توسط فنر بر روی ذره مساوی و خلاف جهت آن است یعنی

انرژی پتانسیل الاستیک = − کار انجام شده توسط فنر بر روی جسم

کاربرد انرژی های پتانسیل (گرانشی و الاستیک) در حل مسائل به روش کار و انرژی

در قسمت های قبل دیدیم که برای بدست آوردن مشخصات سینماتیکی ذره خصوصاً سرعت در روش کار و انرژی مجموع کارهای انجام شده بر روی ذره توسط نیروهای مختلف در طول مسیر را محاسبه می‌کردیم و سپس ~~آن را برابر با تغییر~~ با انتگرال گیری از رابطه ~~کار~~ $\sum F\,dl = mv\,dv$

به این نتیجه می‌رسیدیم که مجموع کارهای انجام شده بر روی ذره برابر است با تغییر در انرژی جنبشی آن در طول مسیر یعنی

در طی مسیر 1-2

$$U_{1-2} = \Delta T = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

در محاسبه ی مجموع کارهای انجام شده توسط نیروهای مختلف، کار نیروی وزن و کار نیروی فنر هم داشتیم. حال با تعریف انرژی پتانسیل گرانشی به صورت منفی کار انجام شده توسط نیروی وزن و انرژی پتانسیل الاستیک به صورت منفی کار انجام شده توسط نیروی فنر می‌توان رابطه ی $U_{1-2} = \Delta T$ را به صورت دیگری نوشت

$$U_{1-2} = U'_{1-2} + W_g + W_{F_K} \longrightarrow U_{1-2} = U'_{1-2} - \Delta V_g - \Delta V_e$$

کار انجام شده توسط سایر نیروها (همه نیروها غیر از وزن و فنر) — کار انجام شده توسط نیروی وزن — کار انجام شده توسط نیروی فنر

انرژی پتانسیل گرانشی برابر $-W_g$ — انرژی پتانسیل الاستیک برابر $-W_{F_K}$

$$\longrightarrow U_{1-2} = \Delta T \longrightarrow U'_{1-2} - \Delta V_g - \Delta V_e = \Delta T \longrightarrow U'_{1-2} = \Delta V_g + \Delta V_e + \Delta T$$

کار انجام شده توسط نیروهای وارد بر جسم به غیر از وزن و فنر در مسیر 1 تا 2 — تغییر انرژی پتانسیل گرانشی از 1 تا 2 — تغییر انرژی پتانسیل الاستیک از 1 تا 2 — تغییر در انرژی جنبشی

* البته موارد بالا زمانی قابل کاربرد است که فنر جزئی از مجموعه باشد (فنر و ذره را هم زمان ببینیم) نه فقط ذره

پس تا اینجا بیان شد که

$$U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$ **

یعنی

$$T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} + U'_{1-2} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2}$$

T_1: انرژی جنبشی در نقطه ①
V_{g_1}: انرژی پتانسیل گرانشی " "
V_{e_1}: " " الاستیک "
U'_{1-2}: کار انجام شده توسط سایر نیروها (بجز وزن و فنر) در مسیر ۱ به ۲
T_2: انرژی جنبشی در نقطه ②
V_{g_2}: انرژی پتانسیل گرانشی " "
V_{e_2}: انرژی " الاستیک " "

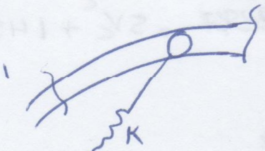
*

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

$$V_g = mgh$$ ارتفاع از زمین

$$V_e = \frac{1}{2} k x^2$$ تغییر طول فنر

استفاده از روش بالا به جای روش متداول کار و انرژی بسیار ساده‌تر است زیرا در این روش تنها لازم است به نقطه‌ی ابتدای و انتهای نگاه کنیم و مسیر مهم نیست. مثلاً در شکل زیر اگر بخواهیم



از روش متداول کار و انرژی استفاده کنیم می‌بایست برای محاسبه‌ی کار نیروی فنر بین ۱ تا ۲ از نیروی فنر انتگرال گیری کنیم زیرا هم مقدار نیرو و هم جهت آن در ۱ تا ۲ تغییر می‌کند ولی اگر فنر و ذره را یک مجموعه در نظر بگیریم (مانند خط‌چین قرمز)، برای تعیین کار نیروی فنر از ۱ تا ۲ کافیست که تغییر در میزان طول فنر بین این دو را حساب کنیم $\frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2)$ که یعنی ΔV_e که منفی کار نیروی فنر است.

هم‌چنین برای محاسبه‌ی نیروی وزن از ۱ تا ۲ که جهت مولفه‌ی این نیرو که در راستای حرکت است از ۱ تا ۲ تغییر می‌کند پس باید با انتگرال گیری حل کنیم مسأله را ولی با روش جدید کافی است که اختلاف ارتفاع دو نقطه‌ی ۱ و ۲ را بدانیم

$$\Delta V_g = mg(h_2 - h_1) \xrightarrow[\text{(وزن)}]{\text{کار نیرو}} W_g = -mg(h_2 - h_1)$$

رابطه‌ی بالای صفحه را می‌توان به صورت زیر نوشت **

$$U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = \Delta(T + V_g + V_e) = \Delta E \longrightarrow U'_{1-2} = \Delta E$$

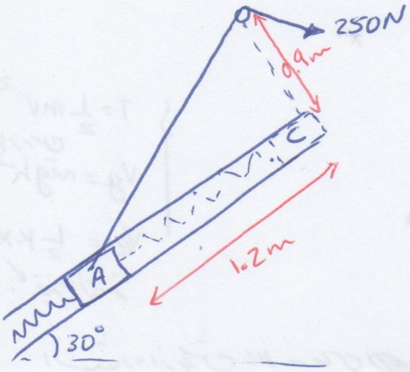
کار سایر نیروها

تغییر در میزان انرژی

تغییر در انرژی در طی مسیر مجموعه‌ی ذره و فنر از نقطه ۱ به نقطه ۲ برابر است با کار نیروهای وارد بر مجموعه (غیر از فنر و گرانش) در فاصله‌ی ۱ تا ۲

برای مسائلی که در آن‌ها فقط نیروهای گرانشی، الاستیک و نیروهای فاقد قابلیت انجام کار (مانند نیروهای عمود بر مسیر مانند عکس العمل سطح) وجود دارند $U'_{1-2} = 0 \rightarrow \Delta E = 0 \rightarrow E_1 = E_2$ قانون بقای انرژی دینامیکی

مثال: لغزنده A به جرم 10 kg با اصطکاک ناچیز به سمت بالای ~~...~~ سطح شیبدار شکل زیر حرکت می‌کند. سختی فنر 60 N/m و دارای کشیدگی 0.6 m در موقعیت A می‌باشد که در این موقعیت لغزنده از حالت سکون رها می‌گردد. نیروی 250 نیوتن ثابت و است سرعت V لغزنده به هنگام عبور از نقطه C چقدر است؟



حل: از روش کار و انرژی مسئله را حل می‌کنیم

$$U'_{A-C} = \Delta E$$

$$\Delta E = E_C - E_A = \frac{1}{2}m(V_C^2 - V_A^2) + \frac{1}{2}K(x_C^2 - x_A^2) + mg(h_C - h_A)$$

تغییر طول فنر در C

$$\longrightarrow \Delta E = \frac{1}{2}\times 10(V_C^2 - 0) + \frac{1}{2}\times 60\left((0.6+1.2)^2 - 0.6^2\right) + 10\times 9.81\times \underset{1.2\sin 30}{\cancel{}}$$

$$\longrightarrow \Delta E = 5V_C^2 + \overset{86.4}{\cancel{}} + \overset{58.86}{\cancel{}} = 5V_C^2 + 145.26$$

U_{A-C} = کار نیروی 250 نیوتن در خلال حرکت = جابجایی نقطه اثر نیرو × مقدار نیرو

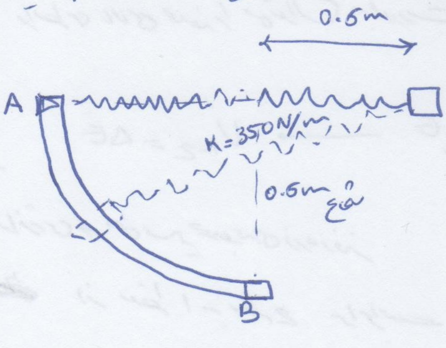
جابجایی نقطه اثر نیرو را می‌توان گفت همان تغییر طول کابل در حد فاصل لغزنده و قرقره می‌باشد

$$\text{جابجایی نقطه اثر نیرو} = \sqrt{(0.9^2 + 1.2^2)} - 0.9 = 0.6$$

$$\longrightarrow U'_{A-C} = 250\times 0.6 = 150\,J$$

$$\longrightarrow 150\,J = 5V_C^2 + \overset{145.26}{\cancel{}}\,J \longrightarrow V_C = 0.974\ m/s$$

مثال: لغزنده A به جرم 3 kg از حالت سکون در موقعیت A رها می‌شود و با اصطکاک ناچیز در امتداد میله می‌لغزد. فنر متصل به لغزنده دارای سختی 350 N/m و طول آزاد 0.5 m است. سرعت لغزنده را به هنگام گذشتن از موقعیت B حساب کنید



حل:

$$U'_{A-B} = \Delta E$$

به غیر از گرانش و فنر نیروی دیگری وارد نمی‌شود (اصطکاک ناچیز است)

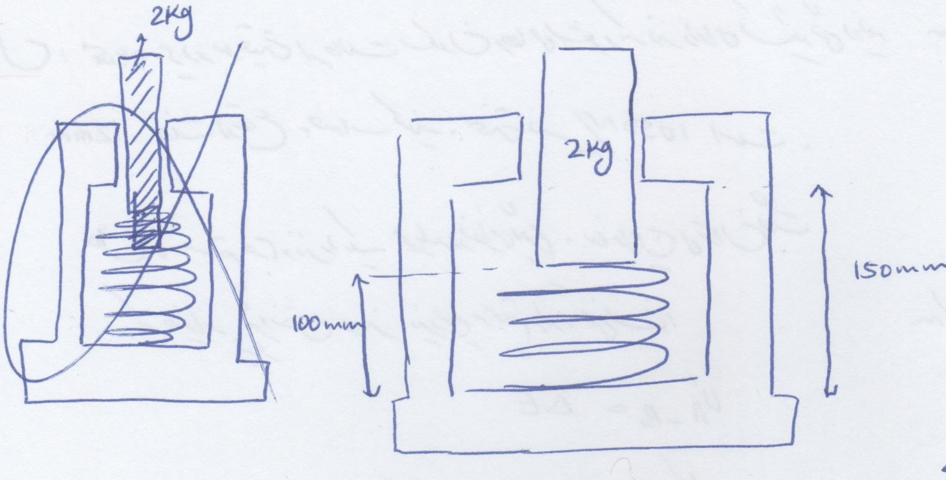
$$U'_{A-B} = 0 \longrightarrow \Delta E = 0$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}m(V_B^2 - V_A^2) + \frac{1}{2}K(x_B^2 - x_A^2) + mg(h_B - h_A) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\times 3(V_B^2 - 0) + \frac{1}{2}\times 350\Big(\big[\underbrace{\sqrt{0.5^2+0.5^2} - 0.6}_{x_B = \text{کشیدگی فنر در } B}\big]^2 - 0.5^2\Big) + 3\times 9.81(0 - 0.6) = 0$$

$$\frac{3}{2}V_B^2 \overset{-52.2}{\cancel{}} - 17.658 = 0 \longrightarrow V_B = 6.82$$

<u>مثال</u>: پیستونی به جرم 2kg از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها می‌شود، در حالی که در این موقعیت، فنر با سختی $K = 500 \, N/m$ به اندازه نصف طول آزاد خود ($200mm$)، پیش فشرده شده است. حداکثر ارتفاع h پیستون نسبت به موقعیت اولیه آن چقدر خواهد بود؟ (فنر به پیستون متصل نیست بلکه پیستون روی آن قرار دارد)



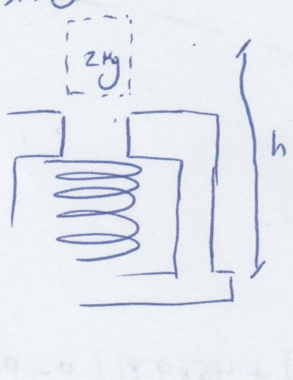
حل: موقعیت ابتدایی را A در نظر می‌گیریم و سپس موقعیت B را ترسیم کرده، و از کار و انرژی استفاده می‌کنیم. چون فقط در نیروی پایستار وجود داریم پس $U'_{A-B} = 0$

$\Delta E = 0 \longrightarrow E_A = E_B$

$$A:\begin{cases} V = 0 \\ V_e = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2} \times 500 \times 0.1^2 = 2.5 \\ V_g = mgh = 2 \times 9.81 \times \cancel{0.045}\ 0.15 = 2.943 \end{cases} \longrightarrow E_A = 5.443$$

خودمان سطح مبنا را در نظر گرفتیم

موقعیت B



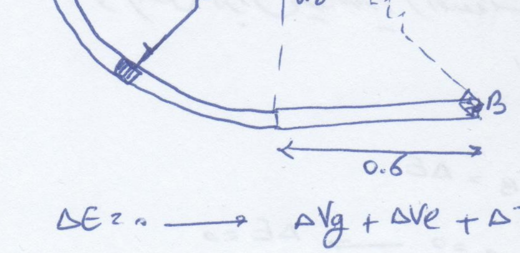
$$B:\begin{cases} V = 0 \longrightarrow \text{برای اوج سرعت صفر است} \\ V_e = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2} \times 500 \times (\cancel{200}\ 0.2 - 0.15)^2 = 0.625 \\ V_g = mgh = 2 \times 9.81 \times h = 19.62h \end{cases}$$

$\longrightarrow E_B = 0.625 + 19.62h$

$\longrightarrow h = 245.6mm$

پس حداکثر ارتفاع نسبت به ارتفاع اولیه برابر است با $245.6\,mm - 150mm = \boxed{95.6mm}$

<u>مثال</u>: فنر دارای طول آزاد $0.4m$ و سختی $200 \, N/m$ می‌باشد. لغزنده‌ای به جرم 3kg به فنر مزبور متصل شده است و مجموعه از حالت سکون در نقطه A رها می‌شود تا حرکت کند و به B برسد. در غیاب اصطکاک سرعت لغزنده را هنگام رسیدن به موقعیت B حساب کنید.



حل: از روش بقای انرژی مکانیکی استفاده می‌کنیم.

$U'_{A-B} = \Delta E$

نیروهای وارده فقط فنر و نیروی وزن هستند

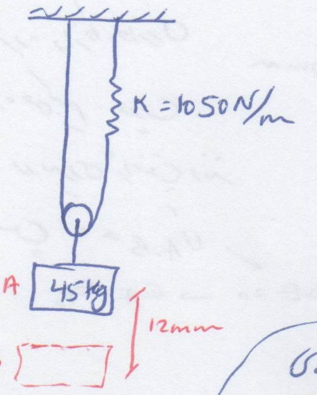
$U'_{A-B} = 0 \longrightarrow \Delta E = 0$

$\Delta E = 0 \longrightarrow \Delta V_g + \Delta V_e + \Delta T = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) + \frac{1}{2}K(x_B^2 - x_A^2) + mg(h_B - h_A) = 0$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\times 3\times V_B^2+\frac{1}{2}\times 200\left[\left(\sqrt{0.6^2+0.8^2}-0.4\right)^2-0.4^2\right]+3\times 9.81\times(0-0.8)=0$$

$$\longrightarrow \frac{3}{2}V_B^2+20\cancel{\phi}-23.544=0 \longrightarrow V_B=1.537\,m/s$$

مثال: مجموعه زیر در موقعیت از حالت سکون رها می‌شود که فنر دارای کشیدگی اولیه 75mm می‌باشد. سرعت استوانه را پس از 12mm افت ارتفاع محاسبه کنید. سختی فنر 1050N/m است.



حل: سیستم جرم و فنر را یک مجموعه در نظر می‌گیریم. بنابراین می‌توان گفت که غیر از نیروی گرانش و فنر نیرویی به سیستم وارد نمی‌شود

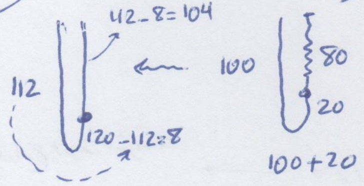
$$U'_{A-B}=\Delta E$$

$$U'_{A-B}=0 \longrightarrow \Delta E=0$$

دقت کنید

ابتدا توجه کنید که برای این که جرم 12mm پایین بیاید فنر باید به اندازه‌ی 24mm کشیده شود (با شکل عددی حل کنید)

$104-\cancel{80}$
$=24$
مقدار تغییر طول فنر



طول ثابت 100+20

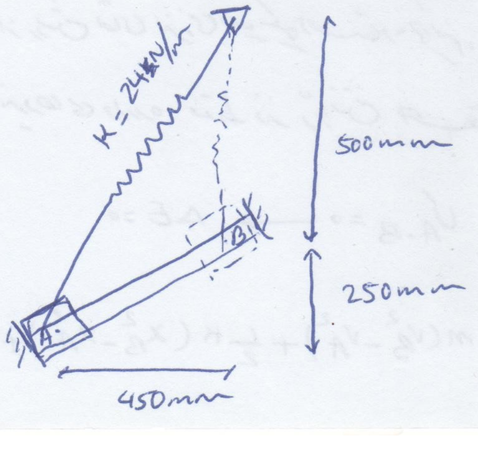
$$\Delta E=0 \longrightarrow \Delta T+\Delta V_e+\Delta V_g=0$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}m(V_B^2-V_A^2)+\frac{1}{2}K(x_B^2-x_A^2)+mg(h_B-h_A)=0$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\times 45(V_B^2-0)+\frac{1}{2}\times 1050\left((0.075+0.024)^2-0.075^2\right)+45\times 9.81(0-0.012)=0$$

$$\longrightarrow \frac{45}{2}V_B^2+2.192-5.297=0 \longrightarrow V_B=0.371\,m/s$$

مثال: طوقه‌ای به جرم 0.9kg از حالت سکون در نقطه‌ی A رها می‌شود و در امتداد میله شیبدار، آزادانه به سمت بالا می‌رود تا با سرعت v به نقطه B برخورد کند. فنر به سختی K=24N/m دارای طول آزاد 375mm است. v را حساب کنید



حل: از روش کار و انرژی استفاده می‌کنیم. به غیر از نیروی فنر و گرانش نیروی دیگری نداریم (اصطکاک ناچیز است)

$$U'_{A-B}=\Delta E$$

$$U'_{A-B}=0 \longrightarrow \Delta E=0$$