سیگنال‌ها و سیستم‌ها

انرژی و توان سیگنال

$x(t)$ پیوسته

$x(n)$ گسسته



جنس سیگنال

$$p(t) = R\,i^2(t) = \frac{1}{R}\,v^2(t)$$

جنس سیگنال

انرژی متناظر با مقاومت فوق در بازه زمانی $[t_1, t_2]$

$$E_{t_2-t_1} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt$$

زمان لازم برای انرژی برای تامین زمانی

$$P_{av} = \frac{E_{t_2-t_1}}{t_2-t_1} = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt$$

دو مشکل

- دامنه سیگنال $x(t)$ نامعین است.
- ممکن است سیگنال $x(t)$ حقیقی نباشد (مختلط باشد)

برای سیگنال پیوسته

$$E_{t_2-t_1} \triangleq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\,dt$$

$$E_{n_2-n_1} \triangleq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

$$P_{av} = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\,dt$$

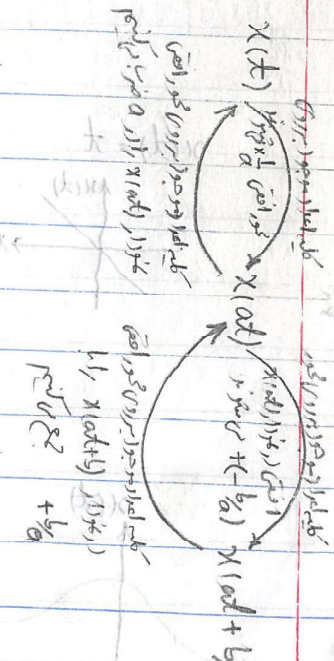
$$P_{av} = \frac{1}{n_2-n_1+1}\sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt$$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt$$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$



دسته‌بندی سیگنال‌ها از نظر توان و انرژی

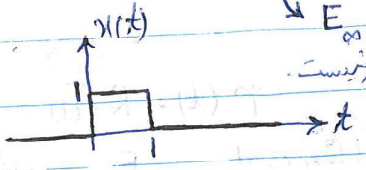
سیگنال‌هایی که انرژی آن‌ها محدود است. (سیگنال‌های انرژی) (در مخابرات)

$E_\infty < \infty \Rightarrow P_\infty = 0$

$E_\infty < \infty \not\Leftarrow P_\infty = 0$ برگشت‌پذیر نیست.

مثال:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

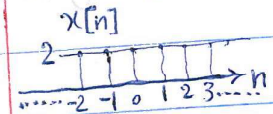


$$E_\infty = \int_0^1 1^2 dt = 1 \qquad P_\infty = 0$$

سیگنال‌هایی که توان آن‌ها محدود باشد (و انرژی آن‌ها نامحدود باشد) (سیگنال‌های توان)

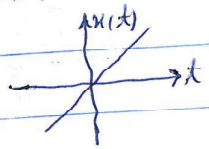
مثال:

$$\forall n: x[n] = 2 \qquad P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 4^2 = 4 \lim_{N\to\infty} \frac{2N+1}{2N+1} = 4$$



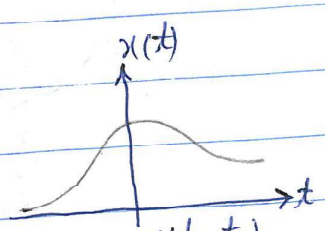
سیگنال‌هایی که انرژی و توان آن‌ها نامحدود است

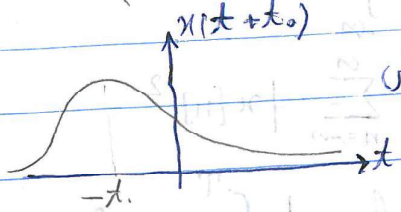
$x(t) = t$



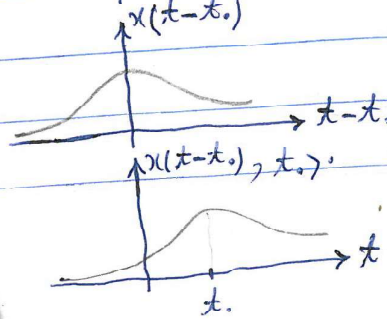
تبدیلات متغیر مستقل سیگنال‌ها (سیگنال‌های زمانی)

۱) شیفت زمانی (جابجایی سیگنال)





تقدم زمانی



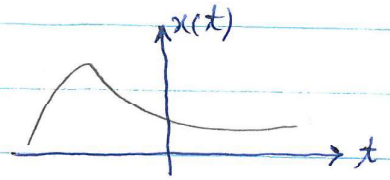
تأخیر زمانی

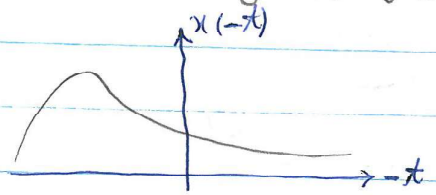
کاربرد زیاد است.

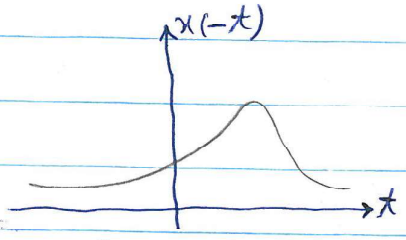
تبدیل‌های روی متغیر مستقل (زمان)

۲) وارونگی زمانی time reversing

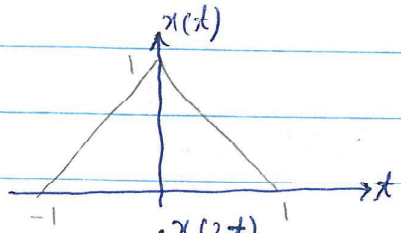
$x(t) \longrightarrow x(-t)$

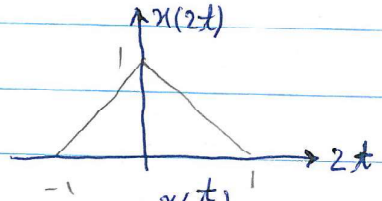


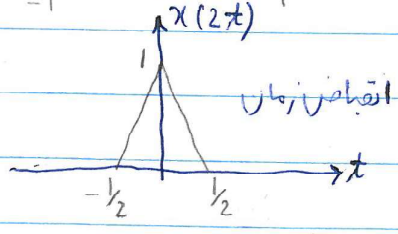


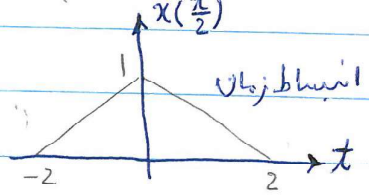


۳) تغییر مقیاس زمانی time scaling

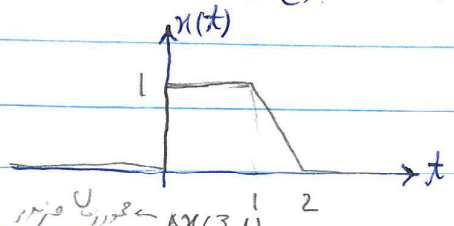


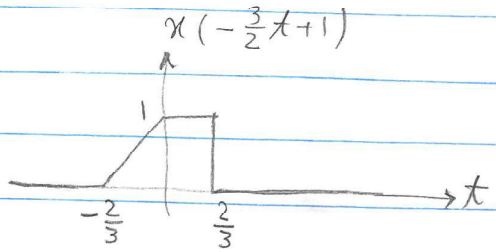


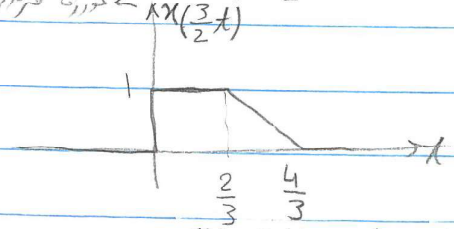




مثال: سیگنال $x(-\frac{3}{2}t+1)$ را از روی سیگنال $x(t)$ استخراج کنید.





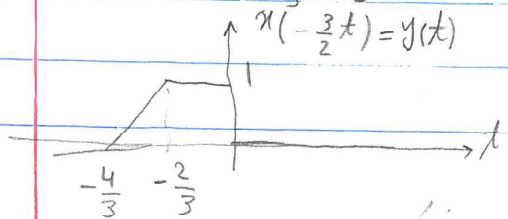


$$x\left(-\frac{3}{2}t+1\right) = z(t)$$

$$= x\left(-\frac{3}{2}\left(t-\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$= y\left(t-\frac{2}{3}\right)$$

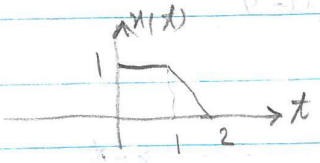
$\frac{2}{3}$ تأخیر بیت t دارد.

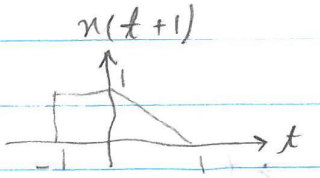


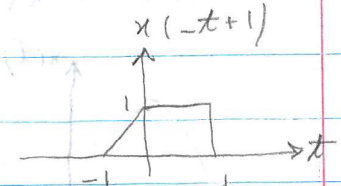
کلاس ۱۲ دی ماه

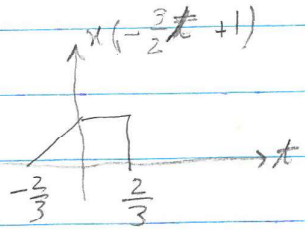
شنبه ۸۱/۱۱/۱۲

$x(-\frac{3}{2}t+1) = ?$

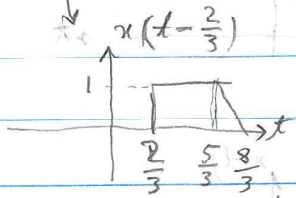


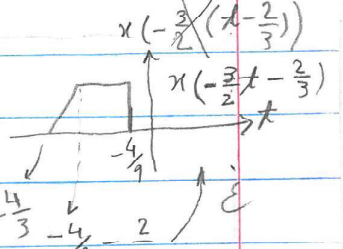






$x(-\frac{3}{2}t+1) = x\left(-\frac{3}{2}(t-\frac{2}{3})\right)$





$-\frac{4}{9}$ $-\frac{4}{3}$ $-\frac{4}{9}$ $-\frac{2}{3}$

روش صحیح انجام کار این است که ابتدا $t-\frac{2}{3}$ را بسازیم.

(جلسه سوم - شنبه ۸۱/۱۱/۱۲ - ۲۰۰۳/۲/۱) این تعریف برای سیگنال‌های پیوسته صادق است. $T \in R^+$ ۳

سیگنال‌های متناوب (پریودیک):

$\exists T > 0, \forall t : x(t) = x(t+T)$ (شیفت زمانی)

صادق (راست راست)

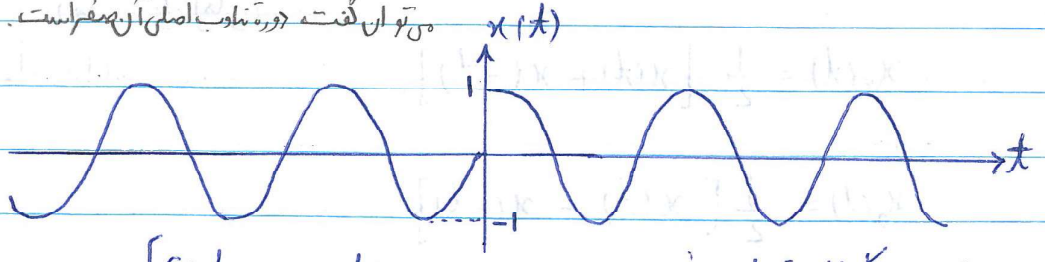
کوچکترین T را دوره تناوب اصلی می‌نامیم (دوره تناوب)

کوچکترین دوره تناوب = دوره تناوب اصلی = T_0

$x(t) = 1$ می‌توان گفت این سیگنال دوره تناوب اصلی ندارد.

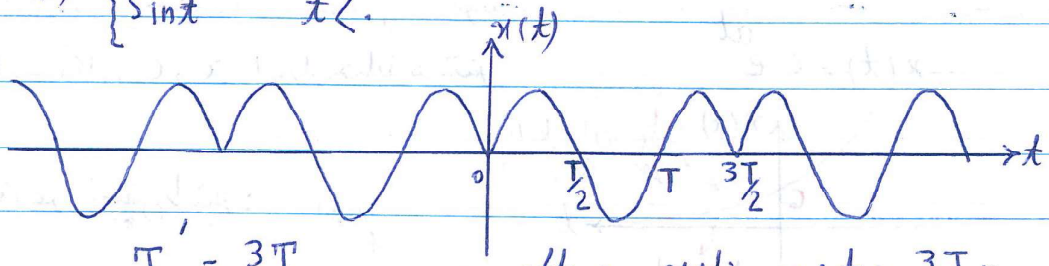
می‌توان گفت دوره تناوب اصلی آن صفر است.

این سیگنال یک سیگنال متناوب است.



$$x(t) = \begin{cases} \cos t & t > 0 \\ \sin t & t < 0 \end{cases}$$

این سیگنال متناوب نیست.



$T_0' = \frac{3T}{2}$ $\quad \forall t : x(t) = x\left(t + \frac{3T}{2}\right)$

$\exists N \in Z^+, \forall n \in Z \quad x[n] = x[n+N]$ (دوره تناوب)

این تعریف برای سیگنال‌های گسسته صادق است.

سیگنال‌های زوج و فرد:

سیگنال $x(t)$ زوج است هرگاه: $x(t) = x(-t)$ ⟺ $x[n] = x[-n]$

(نسبت به محور $t = 0$ متقارن است (محور yها))

و این برای آن خوشحال خواهد بود.

سیگنال $x(t)$ فرد است هرگاه: $x(t) = -x(-t)$ ⟺ $x[n] = -x[-n]$

(نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

در نقطه صفر باید حتماً مقدار صفر را داشته باشد.

• همواره می‌توان یک سیگنال حقیقی را به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نشان داد.

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) = ev\{x(t)\} + od\{x(t)\}$$

($x(t)$: سیگنال حقیقی، $x_e(t)$: even بخش زوج سیگنال $x(t)$، $x_o(t)$: odd بخش فرد سیگنال $x(t)$)

این بحث در مورد سیگنال‌های گسسته نیز دقیقاً برقرار است.

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$$

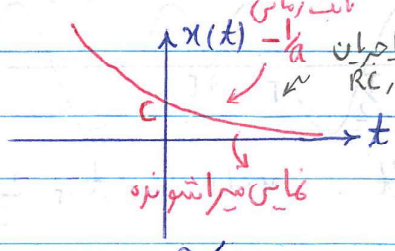
$$x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$

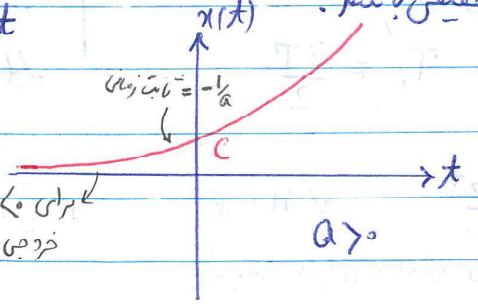
سیگنال‌های نمایی مختلط و سینوسی (پیوسته):

$$x(t) = C e^{at}$$

در حالت کلی C و a اعداد مختلط هستند.

• اگر a و C عدد حقیقی باشند:





برای $R<0$ است. خروجی شروع به افزایش می‌کند.

• اگر $C=1$ و $a=jw_0$ موهومی محض باشد:

$w_0 = 2\pi f_0$ ← فرکانس سیگنال است

$x(t) = e^{jw_0 t}$ ← این سیگنال 6 متناوب است.

در میدان فرکانس سیگنال با w است. و از آن استفاده می‌شود.

$$\exists T>0 \;,\; \forall t: \quad x(t) = x(t+T) \longrightarrow e^{jw_0 t} = e^{jw_0 (t+T)}$$

$$e^{jw_0 t} = e^{jw_0 t} e^{jw_0 T} \longrightarrow e^{jw_0 T} = 1 \longrightarrow w_0 T = \pm 2K\pi$$

$$T = \frac{2K\pi}{|w_0|} \quad K>0 \quad \rightarrow \quad T_0 = \frac{2\pi}{|w_0|}$$

$$e^{jw_0 t} = \cos(w_0 t) + j\sin(w_0 t)$$ رابطه اویلر

هر سیگنال پریودیک را می‌توان با مجموع یک سری سیگنال سینوسی هارمونیک‌های آن نمایش داد.

$$\cos(w_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}\right)$$ تابع زوج

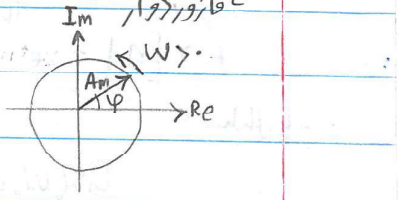
$$\sin(w_0 t) = \frac{1}{2j}\left(e^{jw_0 t} - e^{-jw_0 t}\right)$$ تابع فرد

هر حرکت دورانی یکنواخت روی محور حقیقی است.

$$A_m \cos(wt+\varphi) = Re\{A_m e^{j(wt+\varphi)}\} = Re\{A_m e^{j\varphi} e^{jwt}\} = Re\{A e^{jwt}\}$$

A فازور — فازور دوار

$$= \frac{A}{2}\left[e^{jwt} + e^{-jwt}\right]$$ سرعت زاویه‌ای منفی در جهت عکس عقربه‌های ساعت است.



هارمونیک‌های سیگنال نمایی مختلط: $e^{jw_0 t}$

$$\Phi_K(t) = e^{jKw_0 t} \qquad K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \qquad T_0 = \frac{2\pi}{|w_0|}$$

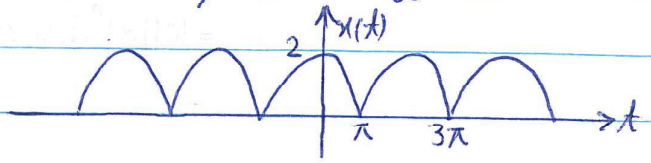
هر سیگنال دلخواه و پریودیک با دوره تناوب T را می‌توان به صورت ترکیب خطی هارمونیک‌های تابع نمایی مختلط نمایش فوق داد.

مثال: اندازه سیگنال $x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$ را رسم کنید.

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$$

$$x(t) = e^{j2.5t}\left(e^{-j0.5t} + e^{j0.5t}\right) = 2e^{j2.5t}\cos 0.5t$$

$$|x(t)| = 2|\cos 0.5t|$$ قدر مطلق



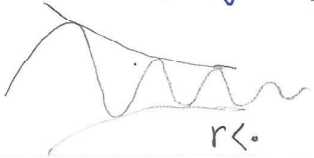
$$x(t) = Ce^{at}$$

$$C = |C|e^{j\theta}, \qquad a = r + jw_0$$

$$x(t) = Ce^{at} = |C|e^{j\theta}e^{(r+jw_0)t} = |C|e^{rt}e^{j(w_0 t+\theta)}$$

$$= |C|e^{rt}\left[\cos(w_0 t+\theta) + j\sin(w_0 t+\theta)\right]$$

بخش‌های حقیقی و موهومی آن هر یک شبیه پاسخ سیگنال‌های مرتبه اول از حالت میرایی ضعیف است.



$r>0$ نوسان آن سینوسی فزاینده می‌باشد.

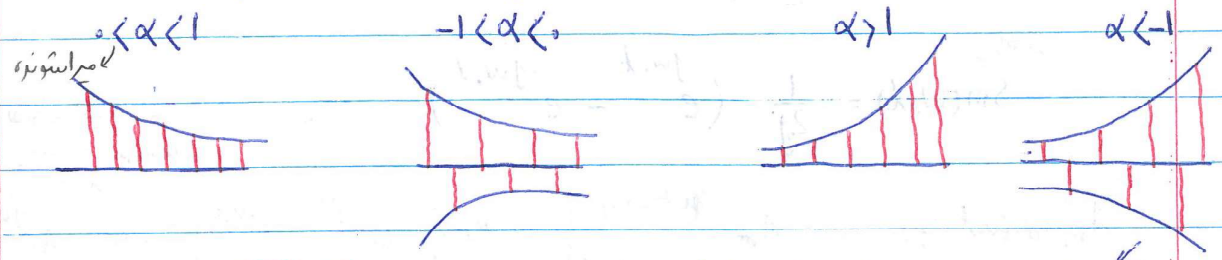
سیگنال‌های گسسته نمایی مختلط:

$x[n] = C e^{\beta n}$ اعداد مختلط هستند C, β

$= C \alpha^n$ اعداد مختلط هستند C, α

$\alpha = e^{\beta}$ ← یا دنباله

- اگر α عدد حقیقی و $C=1$ باشد سیگنال‌های نمایی حقیقی مورد بحث هستند.



- اگر α موهومی محض و $C=1$ باشد.

$x[n] = e^{jw_0 n} = \cos(w_0 n) + j \sin(w_0 n)$ ← سیگنال پایه

$$\cos(w_0 n) = \frac{1}{2}\left[e^{jw_0 n} + e^{-jw_0 n}\right]$$

$$\sin(w_0 n) = \frac{1}{2j}\left[e^{jw_0 n} - e^{-jw_0 n}\right]$$

- اگر α, C مختلط عام باشند:

$C = |C| e^{j\theta}$, $\alpha = |\alpha| e^{jw_0}$

$C\alpha^n = |C||\alpha|^n \left[\cos(w_0 n + \theta) + j \sin(w_0 n + \theta)\right]$

$C\alpha^n = |C| e^{j\theta} |\alpha|^n e^{jw_0 n} = |C||\alpha|^n e^{j(w_0 n + \theta)}$

$= |C||\alpha|^n \left[\cos(w_0 n + \theta) + j \sin(w_0 n + \theta)\right]$

تفاوت های سیگنال های نمایی مختلط گسسته و پیوسته ($e^{jw_0 n}$, $e^{jw_0 t}$):

سیگنال $e^{jw_0 t}$ دارای ویژگی های زیر می باشد:

۱) یک سیگنال متناوب است ← فرکانس سیگنال $f_0 = \frac{|w_0|}{2\pi}$

۲) با افزایش w_0 به طور پیوسته تغییرات سیگنال سریعتر می شود ← سرعت نوسان یا

$f \uparrow \rightarrow T \downarrow$

سیگنال $e^{jw_0 n}$ دارای ویژگی های زیر می باشد:

۱) این سیگنال نسبت به متغیر w_0 متناوب است.

$$\exists W > 0 : e^{jw_0 n} = e^{j(w_0 + W)n} \rightarrow e^{jWn} = 1 \rightarrow W = \pm 2\pi$$

بنابراین کافی است سیگنال e^{jwn} در حدود $0 < W < 2\pi$ یا $-\pi < W < \pi$ بررسی شود.

$W = 0$ ← فرکانس زاویه ای $\rightarrow e^{j0n} = 1$

$W = 2\pi$ ← فرکانس DC

پایین ترین فرکانس

$W = \pi \rightarrow e^{j\pi n} = \cos \pi n + j \sin \pi n = (-1)^n$

بالاترین فرکانس

۲) $\exists N : e^{jw_0 n} = e^{jw_0 (n+N)} \Rightarrow e^{jw_0 N} = 1 \rightarrow w_0 N = 2m\pi$ ← عدد صحیح

$$w_0 = \frac{2m}{N}\pi \qquad m, N \in Z \text{ یا } m \in Z, N \in Z^+$$

شرط متناوب بودن سیگنال $e^{jw_0 n}$ آن است که w_0 ضریب گویایی از 2π باشد.

شرط گویا بودن سیگنال منظور آن است که w_0 ضریب گویایی از 2π باشد.

مثلاً سیگنال $x[n] = \cos n$ متناوب نیست.

مثال: $x[n] = e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n}$ $\quad N_0 = ?$ ← دوره متناوب اصلی

$= x_1[n] + x_2[n]$

N_1 ← دوره متناوب اصلی $\quad N_2$ ← دوره متناوب اصلی

$N_0 = lcm(N_1, N_2)$ ← کوچکترین

$$\frac{2\pi}{3} N_1 = 2\pi m \longrightarrow N_1 = 3m \longrightarrow N_{0_1} = 3$$

$$\frac{3\pi}{4} N_2 = 2\pi m \longrightarrow N_2 = \frac{8}{3} m \xrightarrow{m=3} N_{0_2} = 8$$

$$N_0 = 3 \times 8 = 24$$

می‌خواهیم هارمونیک‌های سیگنال $e^{jw_0 n}$ را به دست آوریم:

همه این سیگنال‌ها دوره تناوب N دارند.

$$e^{jw_0 n} \quad w_0 = \frac{2\pi}{N} \quad e^{j\frac{2\pi}{N} n} \quad \Phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N} n}$$

$K = 0, 1, 2, 3, \ldots, N-1$

N مولفه دارد.

هر دنباله متناوب با دوره تناوب N را می‌توان به صورت ترکیب خطی آنها نوشت.

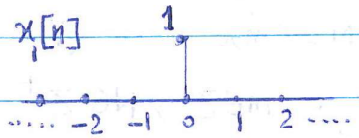
$$\Phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N} n} \qquad K = 0, 1, 2, 3, \ldots, N-1$$

$$\Phi_k[n] = \Phi_{k+Nm}[n]$$ خاصیت متناوب بودن سیگنال

در حیطه زمان بکار می‌رود.

توابع گسسته ضربه یا واحد:

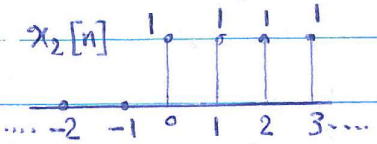
ساده‌ترین سیگنال گسسته به صورت زیر می‌باشد:



unit impulse

تابع ضربه واحد یا تابع نمونه واحد $x_1[n] = \delta[n]$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



$$x_2[n] = U[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

unit step

تفاضل گیری (تفاضل گیری) وضعیت گسسته نوشته شده است.

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-m]$$

انتگرال گسسته جمع اثرهای است.

$n - m \triangleq \nabla$

$m = 0 \longrightarrow \nabla = n$

$m = \infty \longrightarrow \nabla = n - \infty = -\infty$

$$u[n] = \sum_{\tau=n}^{-\infty} \delta[\tau] = \sum_{\tau=-\infty}^{n} \delta[\tau]$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \quad *$$

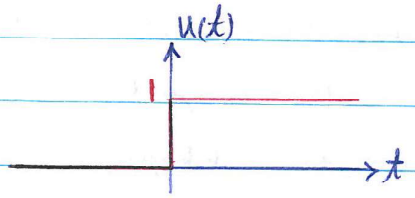
برای بیان تک نمونه‌ها به کار می‌رود.

خاصیت نمونه برداری سیگنال $\delta[n]$:

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$$

توابع پیوسته متناظر واحد:



$$u(0) = \frac{1}{2} \quad \text{تعریف}$$

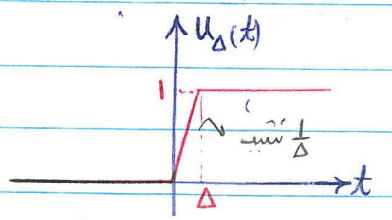
$$\delta(t) = u'(t)$$

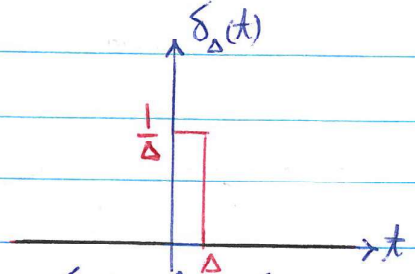
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

$$u(t) = \int \delta(t)\,dt$$

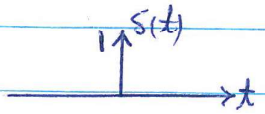
$\delta(t)$: تابع ضربه واحد

$$\begin{cases} \delta(t) = \dfrac{d}{dt} u(t) \\ u(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau \end{cases}$$





$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$



$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

* مشابه سری

$$\sigma \triangleq t - \tau \longrightarrow d\sigma = -d\tau$$

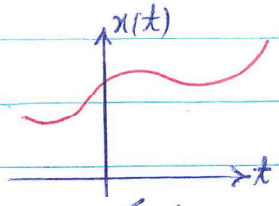
$$\tau = -\infty \longrightarrow \sigma = t - (-\infty) = \infty$$

$$\tau = t \longrightarrow \sigma = 0$$

$t<0 \rightarrow u(t)=0$
$0<\tau<\infty$

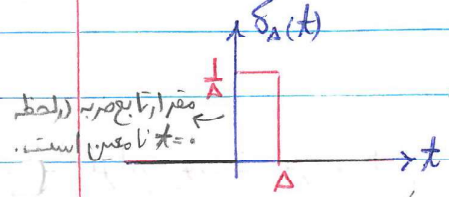
$$u(t)=\int_{\infty}^{0}\delta(t-\tau)\,(-d\tau)=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\tau)\,d\tau$$

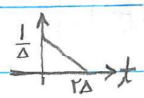
$d\tau$ کمیتی مثبت است. ← با مساحت ۸



خاصیت نمونه برداری تابع ضربه واحد:

$$\lim_{\Delta\to 0} x(t)\,\delta_\Delta(t)=x(0)\,\delta(t)$$





$$x(t)\,\delta(t-t_0)=x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

آنچه برای ما مهم است مساحت زیر نمودار است.

به دلیل اینرسی سیستم های فیزیکی اهمیتی ندارد که در مدت زمان خیلی کوتاه پالسی با ارتفاع زیاد به سیستم وارد شود یا پالسی با همان اثر ولی ارتفاع کمتر.

پس کافی است مساحت زیر منحنی برابر یک باشد و Δ به اندازه‌ای کوچک باشد که سیستم تشخیص ندهد کوچک باشد.

درآمدی بر سیستم ها:

• ارائه ابزارهای عام برای بررسی (آنالیز و تجزیه و تحلیل) یا طراحی سیستم ها.

مثال های ۸-۱ و ۹-۱ و ۱۰-۱ و ۱۱-۱ از کتاب مطالعه شود.

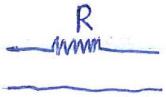
موضوع بحث ما در این درس ← ۱) دستیابی به ابزارهای عام برای تجزیه و تحلیل ← عمدتاً روی سیستم های LTI (خطی تغییرناپذیر با زمان) کار خواهیم کرد.

۲) مدل سازی سیستم واقعی ← دستیابی به یک بیان ریاضی مناسب برای سیستم.

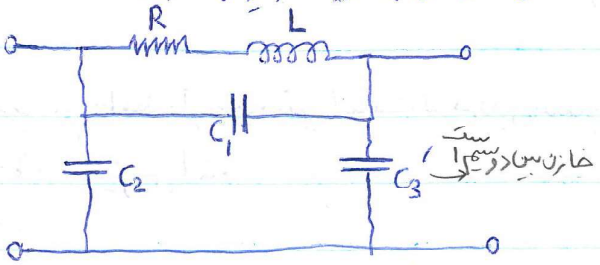
↳ ایده آل سازی به کمک تقریب.

مثال: سیستم واقعی دو رشته سیم های موازی به طول 15 Cm می باشد.

الف) برای کاربرد در فرکانس پایین مدل آن فقط مقاومت الکتریکی می باشد.



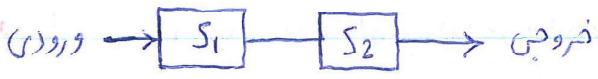
ب) برای کاربرد در فرکانس HF (فرکانس High) V (very) (۳۰ - ۳۰۰ MHz) مدل آن به صورت زیر خواهد بود.



ج) برای کاربرد در فرکانس های ۳ GHz به بالا این عنصر اصلاً دیگر فشرده نیست. در این حالت باید با استفاده از المان گیری مسئله را حل کنیم. در این حالت با یک عنصر گسترده مواجه هستیم. هر المان را باید به صورت فوق مدل کنیم.

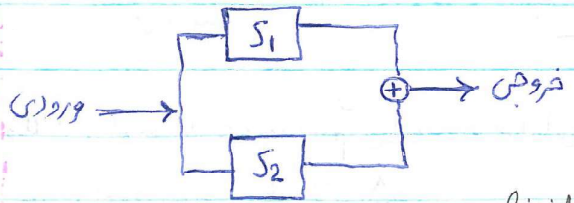
اتصال های مختلف سیستم ها (Interconnection of systems):

۱) اتصال سری (متوالی):



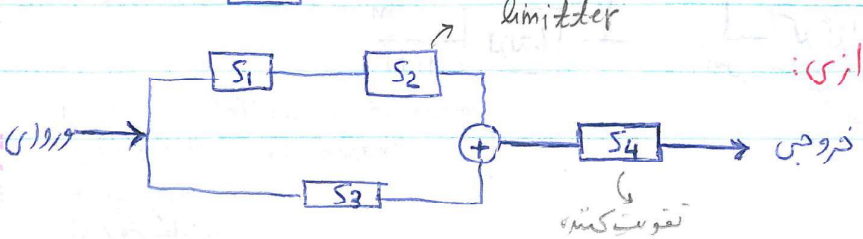
مانند سیستم های مخابراتی.

۲) اتصال موازی:

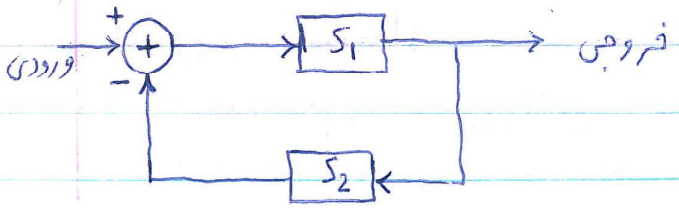


مانند سیستم های صوتی

۳) اتصال سری موازی:



۴) اتصال فیدبک دار:



مانند سیستم های کنترل

• خواص اساسی سیستم ها:

• سیستم های حافظه دار و بدون حافظه:

بدون آن ← memory less

سیستم بدون حافظه سیستمی است که خروجی سیستم در هر لحظه تنها به ورودی آن در همان لحظه وابسته است. (یا تابع ورودی آن در همان لحظه است.)

مثال: $y(t) = R\,x(t)$ $\qquad y[n] = \left(2x[n] - x^2[n]\right)^2$

$\exists t$ ← حداقل وجود یک t کافی است.

سیستم حافظه دار سیستمی است که خروجی سیستم در لحظه t یا n وابسته به مقدار ورودی در سایر لحظات نیز می باشد.

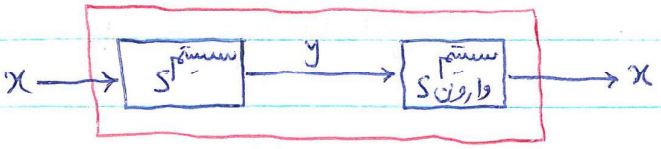
مثال: $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$ ← جمع کننده

$$y(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau + y(-\infty)$$

حافظه معکوس $y(t) = x(t+1)$

سری شده سیستم مورد نظر با معکوس آن سیستم هانی را به دست می دهد.

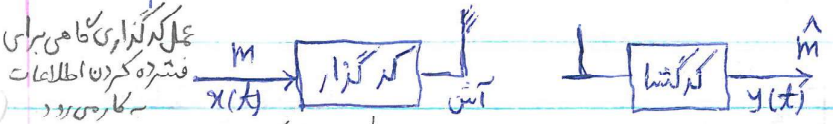
• معکوس پذیری و سیستم معکوس (وارون) (Inverse Systems):



سیستم همانی

گاهی علاقه مندیم یک سیستم معکوس پذیر نباشد. مثلا ایجاد CRC برای برنامه های کامپیوتری

ملاک معکوس پذیری سیستم آن است که به ازای ورودی متمایز، خروجی متمایز داشته باشیم.



حتماً معکوس پذیر است

برخی از اهداف کدگذاری اطلاعات عبارتند از:

۱) فشرده سازی اطلاعات Source Coding

۲) کنترل خطا Channel Coding
↙ بیت توازن.

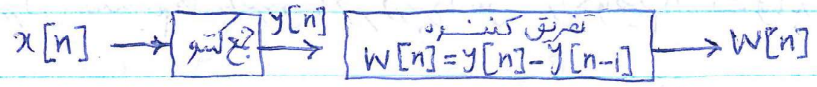
۳) رمزنگاری.

مثال:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] = \sum_{m=-\infty}^{n-1} x[m] + x[n]$$
$$= y[n-1] + x[n]$$

سیستم فوق یک سیستم معکوس پذیر است.

$$x[n] = y[n] - y[n-1]$$



مثال: دو سیستم زیر معکوس پذیر نیستند.

$$y[n] = 0 \qquad y[n] = (x[n])^2$$

(سیستم بلادرنگ یا زمان واقعی) سیستمی که قدرت پیشگویی ندارد

• علیت (causality) در سیستم ها: (nonanticipative)

به سیستمی که خروجی آن در هر لحظه توسط ورودی در همین لحظه و لحظات قبل تعیین می‌شود، سیستم علی گفته می‌شود.

مثال: سیستم‌های انتگرال‌گیر و جمع کننده، سیستم‌هایی علی هستند.

مثال: سیستم $y[n] = x[n] - x[n+1]$ غیرعلی است.

اگر حداقل یک لحظه وجود داشته باشد که شرط فوق برقرار نباشد سیستم غیرعلی است

* در این سیستم‌ها پذیرش تأخیر در پردازش را خواهیم داشت و با پذیرش این اصل چنین سیستم‌هایی غیروجودی آینده کاربرد در سیگنال‌های کمیت. حدود $\frac{1}{8}$ ثانیه

سیستم مقابل نیز یک سیستم غیرعلی است: $y[n] = \frac{1}{2m+1} \sum_{K=-M}^{M} x[n-K]$

مثال: سیستم مقابل یک سیستم غیرعلی است. $y[n] = x[-n]$ سیستم وارون‌ساز

نمونه‌های منفی را در زمان نمونه‌های مثبت می‌سازد.

مثال: سیستم مقابل یک سیستم علی است. $y(t) = x(t) \cos(t+1)$ ، $g(t)$

• پایداری: (stability)

Bounded Input output

BIBO → این پایداری در مهندسی قدرت گفته می‌شود

اگر ورودی محدود به سیستم S همواره منجر به خروجی محدود شود سیستم پایدار نامیده می‌شود.

(دامنه ورودی محدود باشد)

مثال: سیستم مقابل یک سیستم ناپایدار است. $y[n] = \sum_{K=-\infty}^{n} x[K]$

$x[n] = U[n] \longrightarrow y[n] = \sum_{K=0}^{n} 1 = n+1$

ورودی محدود

مثال: سیستم S_1 ناپایدار و سیستم S_2 پایدار است.

$S_1: y(t) = t\,x(t)$

$S_2: y(t) = e^{x(t)}$

$|x(t)| \leq B \longrightarrow -B \leq x(t) \leq B \longrightarrow e^{-B} \leq e^{x(t)} \leq e^{B} \longrightarrow |y(t)| \leq e^{B}$ ، $B>1$ مثبت

TI : Time-Invariant

تغییرناپذیری با زمان :

رابطه بین ورودی و خروجی سیستم همواره ثابت باشد. منفی یا مثبت

تعریف سیستم تغییرناپذیر با زمان: $\forall t, t_0$:

$$y(t) = S(x(t)) \longrightarrow y(t-t_0) = S(x(t-t_0))$$

کلی است.

$$\forall n, n_0 \quad : \quad y[n] = S(x[n]) \longrightarrow y[n-n_0] = S(x[n-n_0])$$

مثال: سیستم مقابل یک سیستم TI با تغییرناپذیر با زمان است.

$$y_1(t) = \sin |x_1(t)|$$ اندازه

$$x_2(t) \triangleq x_1(t-t_0)$$

$$y_2(t) = \sin|x_2(t)| = \sin|x_1(t-t_0)| = y_1(t-t_0)$$

مثال: سیستم مقابل یک سیستم تغییرپذیر با زمان است.

$$y_4[n] = n\,x[n]$$

$$y_1[n] = n\,x_1[n]$$

$$y_2[n] = n\,x_2[n] = n\,x_1[n-n_0] \neq y_1[n-n_0] = (n-n_0)\,x_1[n-n_0]$$

مثال: سیستم مقابل یک سیستم تغییرپذیر با زمان است.

$$y(t) = x(2t)$$

فشرده ساز زمانی

$$y_1(t) = x_1(2t) \quad , \quad x_2(t) \triangleq x_1(t-t_0)$$

$$y_2(t) = x_2(2t) = x_1(2t-t_0)$$

$$y_1(t-t_0) = x_1(2t-2t_0)$$

خاصیت خطی: خاصیت همگنی و خاصیت جمع‌پذیری

خطی بودن :

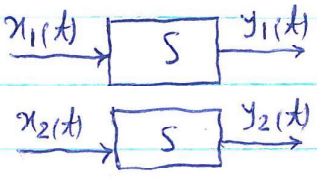
جمع آثار

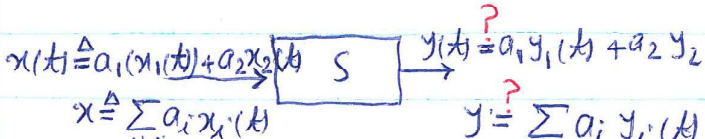
اگر ورودی یک سیستم خطی $x(t)=0$ باشد خروجی آن $y(t)=0$ خواهد بود.



$$a=0 \longrightarrow x_2(t) \triangleq a\,x(t) = 0$$

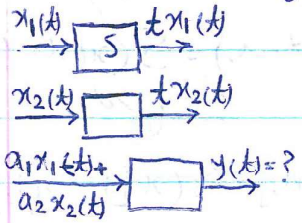
$$y_2(t) = a\,y(t) = 0$$





$$x \triangleq \sum_{i=1} a_i x_i(t) \qquad y \overset{?}{=} \sum_i a_i y_i(t)$$

مثال: سیستم مقابل یک سیستم $y(t) = t\,x(t)$ خطی است.



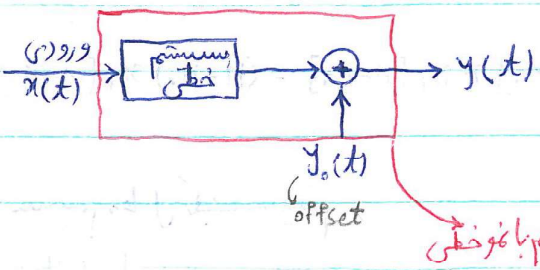
$$y(t) = t\,x(t) = t\left[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\right]$$
$$= a_1 t x_1(t) + a_2 t x_2(t)$$
$$= a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

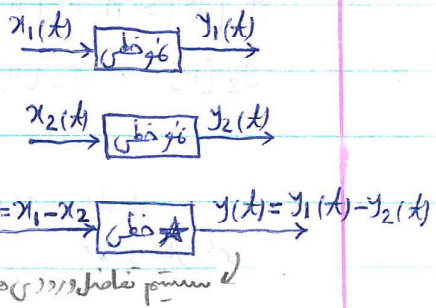
مثال: سیستم مقابل یک سیستم غیر خطی است. $y(t) = x^2(t)$

مثال: سیستم مقابل یک سیستم غیرخطی است. $y[n] = 2x[n] + 3$ (خاصیت افاین)

سیستم مستوی ↙ ↳ $x[n] = 0 \rightarrow y[n] \neq 0$

سیستم فوق یک سیستم با غیر خطی است. (incrementally Linear sys.)





↳ سیستم تفاضل دو ورودی خطی است.

کلاس حل تمرین: یکشنبه ها ۱۳/۵-۱۱/۵ کلاس ۱۰ آقای سیمی
هفته آینده کوئیز اول ← تا پایان فصل اول

دوشنبه ۲۱ر ۱۱ر ۸۱

فصل دوم:

سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان

در این بخش دو ویژگی اول از ویژگی های زیر بسیاری از سیستم های اطراف ما که با آنها مواجه هستیم از این نوع سیستم های با نیز مدنظر خواهیم داشت: برای تجزیه و تحلیل این سیستم ها ابزارهای مناسب و سودمندی در اختیار داریم.

علیت - پایداری - حافظه داری - معکوس پذیری

این دو نیز در آنالیز سیستم های مورد نظر مؤثر هستند.

سیستمهای گسسته LTI و جمع کانولوشن:

- نمایش سیگنال های گسسته بر حسب توابع ضربه:
  - خاصیت نمونه برداری تابع ضربه:

$$x[n]\,\delta[n] = x[0]\,\delta[n]$$

$$x[n]\,\delta[n-n_0] = x[n_0]\,\delta[n-n_0]$$

خاصیت غربالی تابع ضربه Sifting Property

$$x[n] = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x[K]\,\delta[n-K]$$

ترکیب خطی توابع ضربه شیفت یافته

ضرایب آن مقادیر نمونه های سیگنال هستند.

$$x[n] = \cdots + x[-2]\,\delta[n+2] + x[-1]\,\delta[n+1] + x[0]\,\delta[n] + \cdots$$

$\delta[n-i] \longrightarrow \boxed{\mathcal{L}} \longrightarrow h_i[n]$ ← پاسخ ضربه شیفت یافته به اندازه i

($\delta[n] \rightarrow \boxed{\mathcal{L}} \rightarrow h_0[n]$)

$$x[n] = \sum_i \alpha_i \delta[n-i] \longrightarrow \boxed{\mathcal{L}} \longrightarrow y[n] = \sum_i \alpha_i h_i[n]$$

سیستم خطی

$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K]\,h_K[n]$$

← سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{L}\,TI} \longrightarrow h_0[n] \triangleq h[n]$$

$$\delta[n-K] \longrightarrow \boxed{\mathcal{L}\,TI} \longrightarrow h[n-K]$$

تغییرناپذیری با زمان

$$x[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K]\,\delta[n-K] \longrightarrow \boxed{\mathcal{L}\,TI} \longrightarrow y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K]\,h[n-K]$$

(x[n] دلخواه)

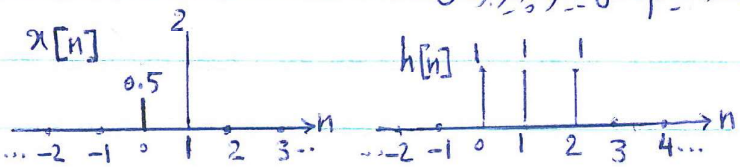
جمع کانولوشن

$$y[n]=\sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K]\,h[n-K]$$

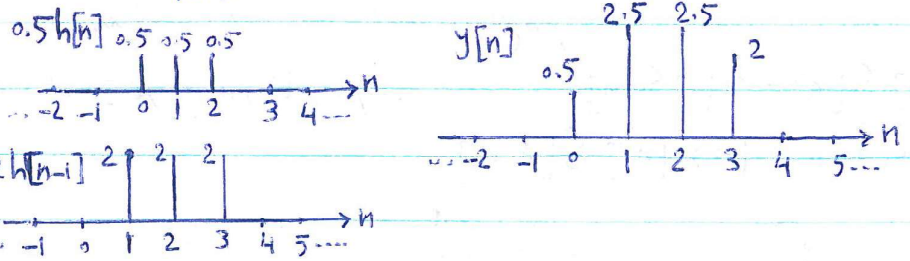
$$y[n]=\sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K]\,h[n-K]=x[n]*h[n]$$

پاسخ ضربه واحد سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان

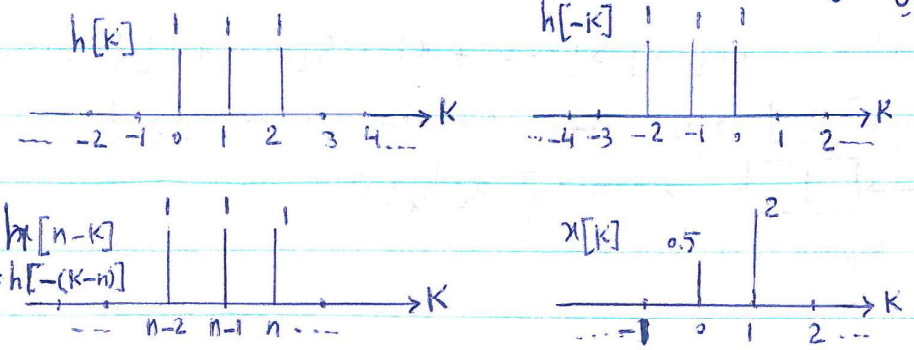
مثال:



$$y[n]=\sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K]\,h[n-K]=0.5\,h[n]+2\,h[n-1]$$



راه حل دیگر برای این مثال:



$$y[n]=0 \quad , \quad n<0 \ , \ n>3$$

$$y[0]=0.5 \qquad y[2]=2.5$$

$$y[1]=2.5 \qquad y[3]=2$$

مثال:

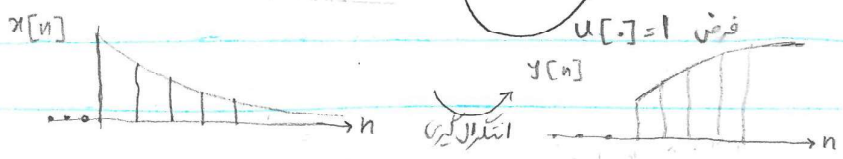
$x[n] = \alpha^n U[n] \qquad 0 < \alpha < 1$

$h[n] = U[n]$ ← سیستم انتگرال‌گیر است.

$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K]\, h[n-K] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \alpha^K U[K]\, U[n-K]$ ($K<0 \rightarrow U[K]=0$)

$y[n] = \sum_{K=0}^{\infty} \alpha^K U[n-K] = \sum_{K=0}^{n} \alpha^K = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ ← شرط $0<\alpha<1$ لازم نیست.

($K>n \rightarrow U[n-K]=0$)



مثال:

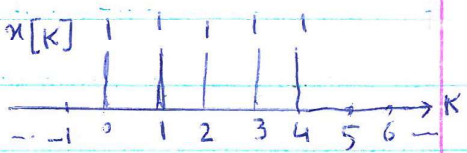
$x[n] = \begin{cases} 1 & 1 \le n \le 4 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$ ← شبیه $h[n]$ قبلی

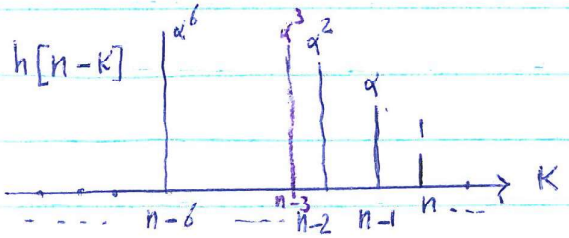
$h[n] = \begin{cases} \alpha^n & 0 \le n \le 6 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$ ← شبیه $x[n]$ قبلی

$\alpha > 1$

انتگرال‌گیر کانولوشن جابه‌جایی‌پذیر است. یعنی جای ورودی و خروجی سیستم در این حالت می‌تواند عوض شود.







$y[n] = 0 \qquad n < 0 \ \text{یا} \ n > 10$

$y[n] = \sum_{K=0}^{n} \underbrace{1}_{x[K]}\, \alpha^{n-K} = \alpha^n \sum_{K=0}^{n} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^K = \alpha^n \frac{1-\alpha^{-(n+1)}}{1-\alpha^{-1}} \qquad 0 \le n \le 4$

$y[n] = \sum_{K=0}^{4} \alpha^{n-K} = \qquad 4 < n \le 6$

$y[n] = \sum_{K=n-6}^{4} \alpha^{n-K} \qquad 6 < n \le 10$

۱۲ شنبه ۸۱/۱۱/۲۶ - ۲-۳/۲/۱۵

سیستم‌های LTI پیوسته و انتگرال کانولوشن:

یک سیگنال دلخواه زمانی را به صورت ترکیب خطی از توابع ضربه شیفت یافته می‌نویسیم. ← ضرایب ترکیب خطی همان نمونه‌های آن سیگنال می‌باشند.

ادعا: گونه پیوسته نمایش سیگنال دلخواه $x(t)$ برحسب ترکیب خطی توابع ضربه شیفت یافته.

انتگرال نیز به مثابه یک ترکیب خطی است. ← غیر قابل شمارش

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

«خاصیت غربالی تابع ضربه»

$$x[n]=\sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K]\,\delta[n-K]$$

اثبات:

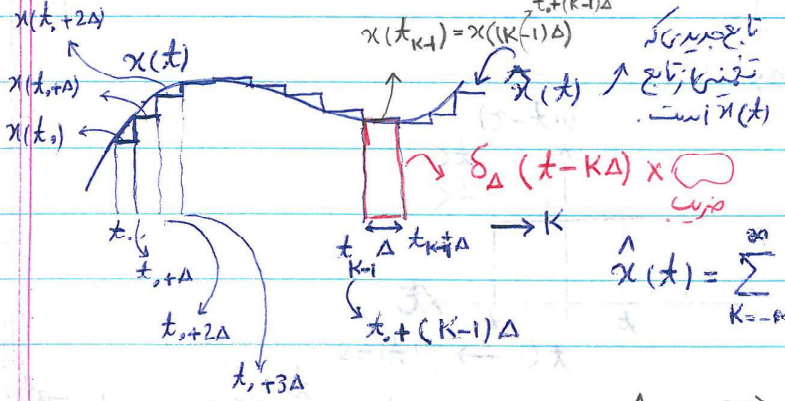
$$x(t)\,\delta(t-t_0)=x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

خاصیت نمونه‌برداری تابع ضربه کرونیکر

زیرا نمودار آن به اندازه $x(t_0)$ است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-\tau)\,d\tau=x(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)\,d\tau}_{1}$$

$=x(t)$



شکل 2-13 کتاب بررسی شود.

$$\hat{x}(t)=\sum_{K=-\infty}^{\infty} x(K\Delta)\,\delta_\Delta(t-K\Delta)\,\Delta$$

$\delta[n-K]$

$$\Delta\to 0 \Rightarrow \hat{x}\to x$$

$$x(t)=\lim_{\Delta\to 0}\hat{x}(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{K=-\infty}^{\infty} x(K\Delta)\,\delta_\Delta(t-K\Delta)\,\Delta=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

K خیلی بزرگ است.
$K\Delta$ کمیتی پیوسته است.
K گسسته و $K\Delta$ پیوسته است.

$\Delta\to d\tau$

$K\Delta\to \tau\in\mathbb{R}$ ← عدد صحیح نیست.

$\Sigma\to\int_{-\infty}^{\infty}$

سیستم خطی

$$\delta_\Delta(t-K\Delta)\to\boxed{L}\to h_{K\Delta}(t,\tau=K\Delta)$$

$$\hat{x}(t)\to\boxed{L}\to\hat{y}(t)=\sum_{K=-\infty}^{\infty} x(K\Delta)\,h_{K\Delta}(t,\tau=K\Delta)\,\Delta$$

$h_\tau(t)$

$$\lim_{\Delta\to 0}\hat{x}(t)=x(t)\to\lim_{\Delta\to 0}\hat{y}(t)=y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t,\tau)\,d\tau$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

جابه‌جایی و حد

$$y(t)=\mathcal{L}\{x(t)\}=\mathcal{L}\{\lim_{\Delta\to 0}\hat{x}(t)\}=\lim_{\Delta\to 0}\mathcal{L}\{\hat{x}(t)\}$$

خروجی

$$=\lim_{\Delta\to 0}\hat{y}(t)$$

(سیستم‌های خطی فیزیکی این جابه‌جایی امکان‌پذیر است. و بدون اشکال است.)

$$=y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

در صورت T.I بودن سیستم می‌توان نوشت:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau=x(t)*h(t)$$

انتگرال کانولوشن

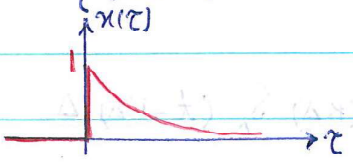
پاسخ ضربه سیستم LTI

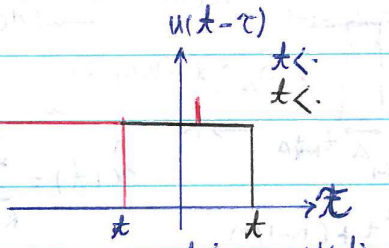
مثال:

$h(t)=u(t)$ سیستم انتگرال‌گیر است. پس جواب آن را می‌توان بدون حل نوشت.

$x(t)=e^{-at}u(t)\ ,\ a>0$

$y(t)=?$





$t<0 \longrightarrow y(t)=0$

$t>0 \longrightarrow y(t)=\int_0^t e^{-a\tau}\,d\tau=-\frac{1}{a}(e^{-at}-1)$

$=\frac{1}{a}(1-e^{-at})$ $t>0$

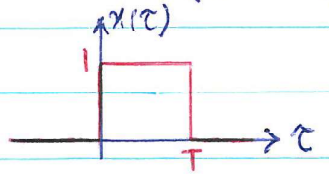
$$y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{a}(1-e^{-at}) & t>0\end{cases}$$

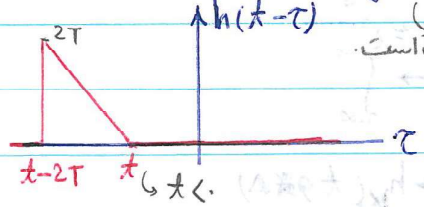
$$y(t)=\frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$$

مثال:

$$h(t)=\begin{cases}t & 0<t<2T\\ 0 & \text{سایر}\end{cases}\ ,\quad x(t)=\begin{cases}1 & 0<t<T\\ 0 & \text{سایر}\end{cases}\ ,\quad y(t)=?$$

(سیگنال علی است.)





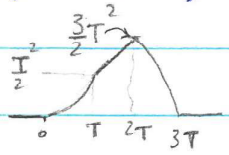
$t<0 \longrightarrow y(t)=0$

$t>3T \longrightarrow y(t)=0$

$0<t<T \longrightarrow y(t)=\int_0^t (t-\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2}(t-\tau)^2\Big)_{\tau=0}^{t} = +\frac{1}{2}t^2$

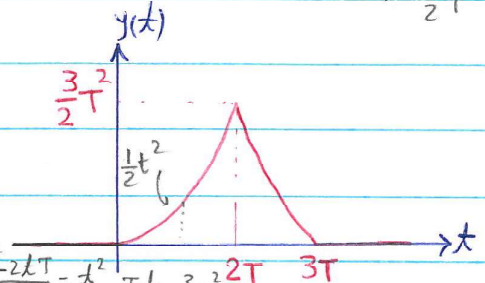
$T<t<2T \longrightarrow y(t)=\int_0^T (t-\tau)\,d\tau = \frac{(t-\tau)^2}{-2}\Big)_{\tau=0}^{T} = \frac{(t-T)^2-t^2}{-2} = \frac{T^2-2tT}{-2} = tT-\frac{1}{2}T^2$

$2T<t<3T \longrightarrow y(t)=\int_{t-2T}^{T} (t-\tau)\,d\tau$

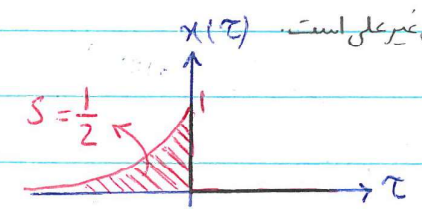


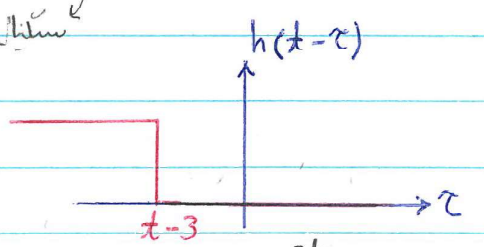
$= \frac{(t-\tau)^2}{-2}\Big)_{\tau=t-2T}^{T} = \frac{4T^2+(t-T)^2}{-2} = \frac{t^2-3T^2-2tT}{-2} = \frac{t^2}{-2}+Tt+\frac{3}{2}T^2$

$t_{max} = -\frac{T}{-1} = T$



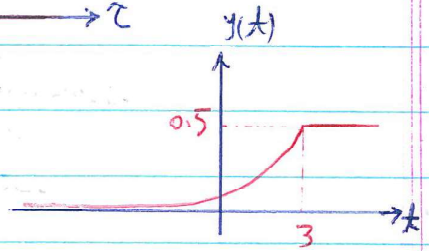
مثال: $h(t)=u(t-3)$ (سیستم انتگرال‌گیر با واحد تأخیر زمانی)، $x(t)=e^{2t}u(-t)$ (سیگنال غیرعلی است)، $y(t)=?$





$t<3: \quad y(t)=\int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}e^{2\tau}\Big)_{-\infty}^{t-3} = \frac{e^{2t}}{2e^6}$

$t>3: \quad y(t)=\int_{-\infty}^{0} e^{2\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}e^{2\tau}\Big)_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}$



$h[n]=\begin{cases}1 & n=0,1\\ 0 & \text{سایر}\end{cases}$ ← پاسخ ضربه یک سیستم

اگر سیستم LTI ناشر روابط بین ورودی و خروجی بر هیچ بازه‌ای که متخصر به صفر نیست

۱۴ ۸۱/۱۱/۲۸-۲۰۳۲/۲/۱۷

خاصیت یک به یکی است

خطی تغییرناپذیر با زمان ← خطی تغییرناپذیر با زمان به طور کلی

با مشخص شدن پاسخ ضربه سیستم، آن سیستم مشخص می‌شود.

خواص کلی

خواص جبری

کانولوشن

خواص سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان LTI:

پاسخ ضربه یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان LTI

$$h[n]=\begin{cases}1 & n=0,1\\ 0 & \text{سایر}\end{cases}$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] \qquad n-k=0,1 \Rightarrow k=n,n-1$$

$$= x[n]h[0]+x[n-1]h[1]$$

$$y[n]=x[n-1]+x[n]$$

- به ازای هر مقدار دلخواه صحیح m سیستم $y[n]=(x[n-1]+x[n])^m$ را با پاسخ ضربه $h[n]=(\delta[n-1]+\delta[n])^m=\begin{cases}0 & n\neq 0,1\\ 1 & n=0,1\end{cases}$ متقابل خواهیم ساخت. $(\forall m\in\mathbb{Z}^+)$

چون برای $m\neq 1$ سیستم‌های مورد نظر خطی نیستند ← می‌توان سیستم‌های مشابهی پیدا نمود که تغییرناپذیر با زمان باشند.

- خاصیت جابه‌جایی: (Commutative Property)

سیستم‌های گسسته: $x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$

سیستم‌های پیوسته: $x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau=\int_{\infty}^{-\infty}-x(t-t')\,h(t')\,dt'=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$

$$t-\tau\triangleq t' \rightarrow -d\tau=dt'$$

$$\tau=-\infty \rightarrow t'=\infty$$

$$\tau=+\infty \rightarrow t'=-\infty$$

$$h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$



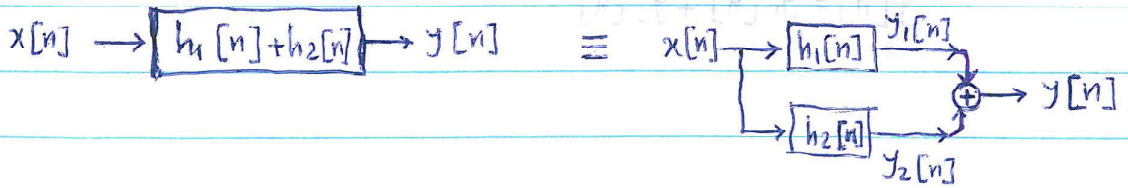
- خاصیت توزیع‌پذیری: (Distributive property)

عملگر * روی + توزیع‌پذیر است.

مجموع حاصل از توابع ساده‌تر

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=(x[n]*h_1[n])+(x[n]*h_2[n])$$

$$x(t)*(h_1(t)+h_2(t))=(x(t)*h_1(t))+(x(t)*h_2(t))$$



$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = (h_1(t) + h_2(t)) * x(t) = (h_1(t) * x(t)) + (h_2(t) * x(t))$$

خاصیت جابجایی — خاصیت خطی بودن

$$= (x(t) * h_1(t)) + (x(t) * h_2(t))$$

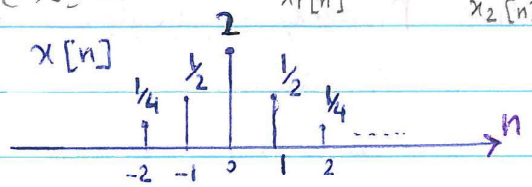
سیستم انتگرال گیر

$$h[n] = u[n]$$

مثال:

$$x[n] = \underbrace{2^{-n} u[n]}_{x_1[n]} + \underbrace{2^{n} u[-n]}_{x_2[n]} = x_1[n] + x_2[n]$$

سیگنال زوج



$n = 0$ به ازای $u[n]$ همواره برابر یک است.

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

$$y_1[n] = x_1[n] * h[n] \quad , \quad y_2[n] = x_2[n] * h[n]$$

$$y_1[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} 2^{-K} u[K]\, u[n-K] = \sum_{K=0}^{\infty} 2^{-K} u[n-K] = \sum_{K=0}^{n} 2^{-K} = \frac{1-(0.5)^{n+1}}{1-0.5}$$

$$y_1[n] = 2\left(1-(0.5)^{n+1}\right)$$

$$y_2[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} 2^{K} u[-K]\, u[n-K] = \sum_{K=-\infty}^{0} 2^{K} u[n-K] = \searrow$$

$$n \leq 0 \rightarrow y_2[n] = \sum_{K=-\infty}^{n} 2^{K} \underset{K' \triangleq -K}{=} \sum_{K'=-n}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{K'} \underset{K \triangleq K'+n}{=} \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{K-n} = 2^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2^{n+1}$$

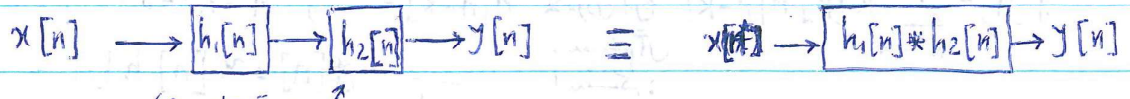
$$n \geq 1 \rightarrow y_2[n] = \sum_{K=-\infty}^{0} 2^{K} = 2 = \sum_{K'=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{K'}$$

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

خاصیت شرکت پذیری (Associative property) :

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$



سیستم‌های سری

سیستم‌های سری جابه‌جایی پذیر هستند.

تمرین: اثبات کنید.

چرکانولوشن دارای خاصیت جابه‌جایی * و دارای خاصیت توزیع پذیری * روی + و دارای خاصیت شرکت پذیری بود، ونیز عضو خنثی برای توابع LTI با عملگر * دارد

↙ تابع $\delta(t)$ می‌باشد

۸۱/۱۱/۳۰ -

سیستم‌های LTI بدون حافظه:

یک سیستم LTI بدون حافظه است اگر و تنها اگر:

$$h[n] = K\delta[n]$$

$$h(t) = K\delta(t)$$

شرط بدون حافظه بودن این سیستم آن است که:

$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K]\,h[n-K] \qquad h[n-K] = 0 \;,\; n-K \neq 0$$

$$y[n] = x[n]\,h[0]$$

عضو خنثی برای سیستم‌های LTI

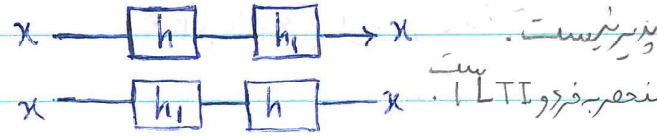
حالت خاص یک سیستم LTI بدون حافظه، سیستم همانی (Identity) می‌باشد:

$$\delta[n] * x[n] = x[n] * \delta[n] = x[n] \qquad \forall x[n] \;;\; h[n] = \delta[n]$$

معکوس پذیری سیستم‌های LTI:

سیستم $y(t) = 0$ خطی تغییرناپذیر بازمان بوده ولی معکوس‌پذیر نیست.

هر سیستم LTI الزاماً معکوس‌پذیر نیست.



می‌توان ثابت کرد که h_1 (در صورت وجود) منحصربفرد و LTI است.

سیستم تأخیر (هنده به اندازه t_0)

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

مثال:

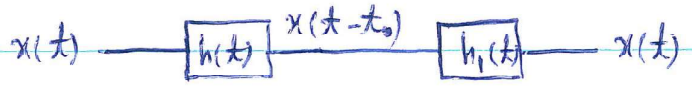
$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

$$\delta(t - t_0) * h_1(t) = \delta(t)$$

$$h_1(t) = \delta(t + t_0)$$

$h_1(t - t_0) = \delta(t)$

$t - t_0 \triangleq t'$



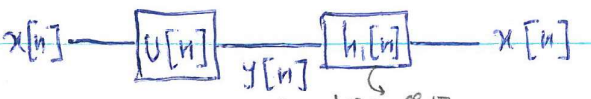
مثال:

$$h[n] = u[n] = \sum_{K=-\infty}^{n} \delta[K]$$

حاصل‌جمع کننده انباره‌ای

$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K]\,u[n-K] = \sum_{K=-\infty}^{n} x[K] = \sum_{K=-\infty}^{n-1} x[K] + x[n]$$

$$y[n] = y[n-1] + x[n] \longrightarrow x[n] = y[n] - y[n-1]$$



تابع diffren مرتبه اول است.

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

اثبات:

$$u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1])$$

$$= u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1]$$

$$= u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

علیت در سیستم‌های LTI :

یک سیستم LTI علّی است اگر و تنها اگر :

$h[n] = 0 \quad n < 0$

$h(t) = 0 \quad t < 0$

در یک سیستم خطی و علی تا جایی که ورودی صفر است باید و انتظار داریم خروجی هم صفر باشد. (مسئلهٔ آخرین سری اول)

$\delta \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow h$

آرامش اولیه یا سکون یعنی آنکه تا وقتی که ورودی سیستم صفر است خروجی آن نیز صفر باشد. $\xrightarrow[\text{خطی}]{\text{در سیستم}}$ سیستم علی است.

علی بودن سیستم $\equiv$ آرامش اولیه داشتن

«انباتک»

سیستم علی است $\rightarrow$ $\delta[n] = 0 \;,\; n < 0 \rightarrow h[n] = 0 \;,\; n < 0$

$h[n] = 0 \;,\; n < 0 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\, h[n-k]$

چون $y[n]$ به هیچ ورودی بعد از n وابسته نیست سیستم علی می‌باشد.

در سیستم های خطی و تغییرناپذیر با زمان و علی می توان نوشت :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$$

$n-k = n'$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

τ

پایداری در سیستم های LTI :

$$\forall n : \; |x[n]| < B \longrightarrow |y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] \right|$$

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|\,|h[n-k]|$$

$$\leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n-k]|$$

$$\leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

شرط کافی برای پایداری سیستم های LTI مطلقاً جمع پذیری پاسخ ضربه آنها است.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

این شرط لازم نیز هست. شرط لازم و کافی

سیستم LTI پایدار ← مطلقاً جمع پذیری پاسخ ضربه سیستم

عکس و نقیض

$\sum_{K=-\infty}^{\infty} |h[K]| = \infty$ ← سیستم LTI ناپایدار است.

پاسخ ضربه سیستم مطلقاً جمع پذیر نیست.

مثال نقض برای ناپایدار بودن سیستم مورد نظر

$$x[n] \triangleq \begin{cases} 0 & h[-n] = 0 \\ \dfrac{h[-n]}{|h[-n]|} & h[n] \neq 0 \end{cases}$$

ورودی محدود است.

یکی یا منفی یک

$h[-K]\,h[-K] = |h[-K]|^2$

$$y[0] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K]\,h[-K] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{h[-K]}{|h[-K]|}\,h[-K] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} |h[-K]|$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{\infty} |h[K]| = \infty$$

پس سیستم ناپایدار است.

نتیجه: شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم های LTI پیوسته مطلقاً انتگرال پذیر بودن پاسخ ضربه $h(t)$ است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

پایداری در سیستم‌های LTI

$\forall n,\ |x[n]| < B$

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|\,|h[n-k]|$$

$$\le B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n-k]| \le B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

پاسخ ضربه سیستم مطلقاً جمع‌پذیر $\infty > |h[k]|$

شرط کافی برای پایداری سیستم‌های LTI مطلقاً جمع‌پذیری پاسخ ضربه است.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

برای اثبات لازم بودن این شرط کافی است مثال نقض بزنیم.

سیستم LTI پایدار $\Rightarrow$ مطلقاً جمع‌پذیری پاسخ ضربه

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty$ (*) $\Rightarrow$ سیستم LTI ناپایدار است.

$$x[n] \triangleq \begin{cases} 0 & h[-n] = 0 \\ \dfrac{h[-n]}{|h[-n]|} & h[-n] \neq 0 \end{cases}$$

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{h[-k]}{|h[-k]|}\,h[-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[-k]|$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty$$ (طبق فرض (*))

نتیجه:

شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم‌های LTI پیوسته مطلقاً انتگرال‌پذیر بودن $h(t)$ است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

پاسخ پله واحد سیستم‌های LTI:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow s(t) \qquad s(t) = u(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,u(t-\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau \\ h(t) = \dfrac{ds(t)}{dt} \end{cases}$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} h[k] + h[n] \Rightarrow h[n] = s[n] - s[n-1]$$

سیستم‌های LTI علی قابل توصیف با معادلات دیفرانسیل و دیفرنس :

معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

اگر $N=0$:

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

اگر $N \neq 0$:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

شرایط کمکی : auxiliary conditions

ابتدا، اگر شرایط آرامش اولیه (initial rest) برای یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت برقرار باشد آنگاه سیستمی که با معادله فوق توصیف می‌شود، خطی، تغییرناپذیر بازمان، علی خواهد بود

$$\forall t_0 \quad x(t) = 0 \quad t < t_0 \Rightarrow y(t) = 0 \quad t < t_0$$

$$x_1 \longrightarrow \boxed{\quad} \xrightarrow{y_1} \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_1(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x_1(t)}{dt^k} \qquad y_1(t_0) = y_{10} = \dot{y}_1(t_0) = \dots = y_1^{(N-1)}(t_0) = y_{1(N-1)}$$

$$x_2 \longrightarrow \boxed{\quad} \xrightarrow{y_2} \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_2(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x_2(t)}{dt^k} \qquad y_2(t_0) = y_{20}, \dots, y_2^{(N-1)}(t_0) = y_{2(N-1)}$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \longrightarrow \boxed{\quad} \xrightarrow{y_3 = ?} \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_3(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k (\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t))}{dt^k}$$

$$= \alpha_1 \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x_1(t)}{dt^k} + \alpha_2 \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x_2(t)}{dt^k} = \alpha_1 \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_1(t)}{dt^k}$$

$$+\alpha_2 \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_2(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k (\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t))}{dt^k}$$

برقرار بودن شرایط اولیه ⟸ با توجه به یکتایی پاسخ معادلات

$$y_3(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

شرط کافی ↓

$$y_3(t_0) = \alpha_1 y_1(t_0) + \alpha_2 y_2(t_0) = 0$$
$$\vdots$$
$$y_3^{(N-1)}(t_0) = \alpha_1 y_1^{(N-1)}(t_0) + \alpha_2 y_2^{(N-1)}(t_0) = 0$$



بررسی تغییرناپذیری با زمان:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_1(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x_1(t)}{dt^k} \quad (*) \qquad \begin{cases} y_1(t_0) = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(N-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_2(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x_1(t - t_1)}{dt^k} \qquad \begin{cases} y_2(t_0 + t_1) = 0 \\ \vdots \\ y_2^{(N-1)}(t_0 + t_1) = 0 \end{cases}$$

$$(*) \quad t \to t - t_1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_1(t - t_1)}{d(t - t_1)^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x_1(t - t_1)}{d(t - t_1)^k} \qquad \begin{cases} y_1(t_0) = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(N-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$= \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x_1(t - t_1)}{dt^k}$$

$$\Rightarrow y_2(t) = y_1(t - t_1) \quad \text{if } t_0 + t_1$$

$$y_2(t) = y_1(t - t_1) = 0 \quad \text{if } t < t_0 + t_1$$

مثال ۱:

الف) $x_1(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + 2y(t) = x(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ب) $x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ 1 & -1 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$

ج) $x_3(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$

$y(t) = y_h + y_p$

y_h = ? $\quad s + 2 = 0 \Rightarrow s = -2$, $y_h = k e^{-2t}$

$y_p(t) = \frac{1}{2} x(t)$

$y(t) = \frac{1}{2} x(t) + k e^{-2t}$

حل سوال ۱:

$$y_1(t) = \frac{1}{2}x_1(t) + ke^{-2t}$$

$t \geq 0 \quad y_1(t) = \frac{1}{2} + ke^{-2t} \xrightarrow{y(0)=0} y_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$

$t < 0 \quad y_1(t) = ke^{-2t}$

• از آنجایی که سیستم پایدار است، در صورت ورودی علی پاسخ ضربه آن نیز علی خواهد بود.

y_1 علی $\Longrightarrow t < 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow y_1(t) = 0 \quad t < 0$

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) & t \geq 0 \end{cases}$$ سیستم علی است.

$$y_2(t) = \frac{1}{2}x_2(t+1) + ke^{-2t}$$

$t > -1 \quad y_2(t) = \frac{1}{2} + ke^{-2t}$

$y_2(0) = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_2(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}), \quad t > -1$

y_2 باید پایدار باشد $\Rightarrow t < -1$

$y_2(t) = ke^{-2t} \quad y_2(-1) = ke^{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{2})$

$\Rightarrow k = \frac{1}{2}(e^{-2} - 1)$

$y_2(t) = \frac{1}{2}(e^{-2} - 1)e^{-2t}, \quad t < -1$

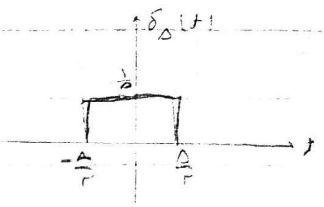
$$\Rightarrow y_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) & t > -1 \\ \frac{1}{2}(e^{-2} - 1)e^{-2t} & t < -1 \end{cases}$$

چون شرط پایداری برقرار نیست، سیستم علی نیز نمی‌باشد.

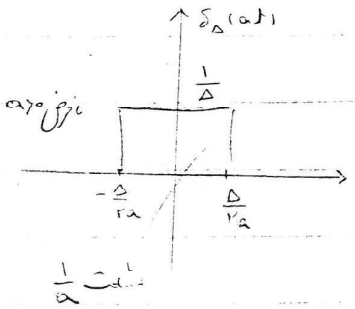
سیستم علی نیست.

حل تمرین:

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$



$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$



معرفی کننده یک سیستم LTI علی می‌باشد.

معادلات دیفرانس خطی با ضرایب ثابت:

شکل عمومی معادلات مذکور به صورت زیر است:

$$\sum_{K=0}^{N} a_K y[n-K] = \sum_{K=0}^{M} b_K x[n-K]$$

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

$y_h[n]$: بخش همگن پاسخ — $y_p[n]$: بخش خصوصی پاسخ

$$\sum_{K=0}^{N} a_K y_h[n-K] = 0$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{K=0}^{M} b_K x[n-K] - \sum_{K=1}^{N} a_K y[n-K]\right\}$$

فرم بازگشتی — Recursive form

به n نمونه‌های قبل خروجی بستگی دارد.

- شرط آرامش اولیه معادله را به صورت زیر نشان می‌دهیم: $y[n-K] = 0 \quad , \quad K = 1,2,\dots,N$ یعنی n های $n<0$

- حالت خاص: $N=0 \longrightarrow y[n] = \frac{1}{a_0}\sum_{K=0}^{M} b_K x[n-K] = \sum_{K=0}^{M} \frac{b_K}{a_0} x[n-K]$

این سیستم حافظه دارای اثر خود را در سراسر انجام به پایان می‌رسد. معادلات بازگشتی ندارد.

$$= \sum_{K=-\infty}^{\infty} h[K]\, x[n-K]$$

سیستم FIR است.

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & n = 0,1,2,\dots,M \quad \text{تعداد محدود} \\ 0 & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

سیستم با پاسخ ضربه با پهنای زمانی متناهی (FIR: Finite Impulse Response)

اثر ضربه تعداد محدود پاسخ در لحظات محدود دارند. سیستم‌های با $N=0$ از این نوع هستند.

IIR: Infinite Impulse Response سیستم با پاسخ ضربه با پهنای زمانی نامتناهی

است. سیستم‌های با $N \neq 0$ از این نوع هستند.

مثال: سیستم مرتبه اول

$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n]$ شرط آرامش اولیه مفروض است.

$x[n] = K\delta[n]$

$x[n] = 0 \ , \ n<0 \xrightarrow[\text{شرط اولیه}]{} y[n] = 0 \ , \ n<0$

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n]$$

$$y[0] = \frac{1}{2} y[-1] + x[0] = K \quad (y[-1] = 0,\ x[0] = K)$$

$$y[1] = \frac{1}{2} y[0] + x[1] = \frac{1}{2} K \quad (x[1] = 0)$$

$$y[2] = \frac{1}{2} y[1] + x[2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 K$$

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n K$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n U[n] \quad (K=1)$$

← سیستم IIR یا پاسخ ضربه بی‌پایان زمانی نامتناهی است.

← زیرمجموعه سیستم‌های LTI

نمایش بلوکی سیستم‌های قابل توصیف با معادلات دیفرانسیل و دیفرنس خطی با ضرایب ثابت:

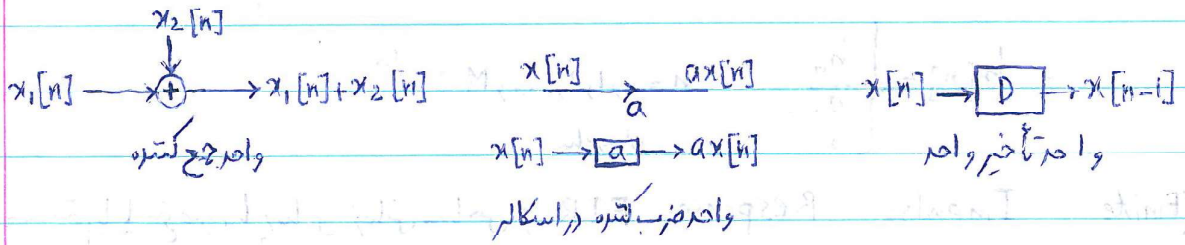
فواید نمایش بلوکی فوق عبارتند از:

۱) ارزش نظری و تئوریک.

۲) ارزش پیاده‌سازی عملی.

• بلوک‌های مقدماتی مورد نیاز برای نمایش بلوکی یک معادله دیفرنس (فعلاً مرتبه اول) عبارتند از:

← هر معادله دیفرنس خطی با ضرایب ثابت

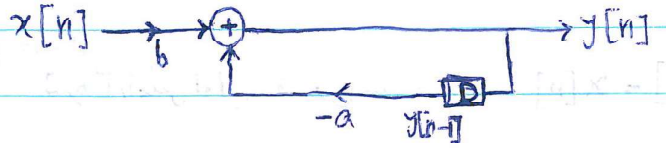


مثال: معادله دیفرنس خطی مرتبه اول ($M=0$, $N=1$)

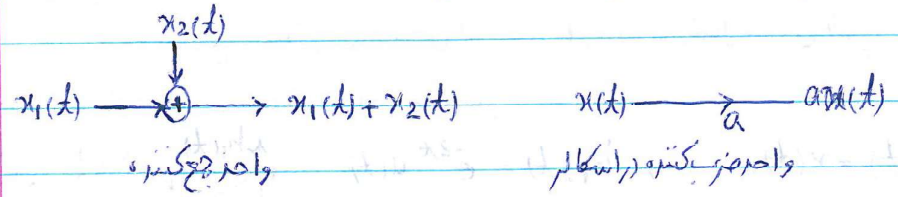
$$y[n] + a\,y[n-1] = b\,x[n]$$

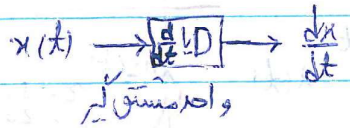
$$y[n] = b\,x[n] - a\,y[n-1]$$

ساختار feedback دارد.



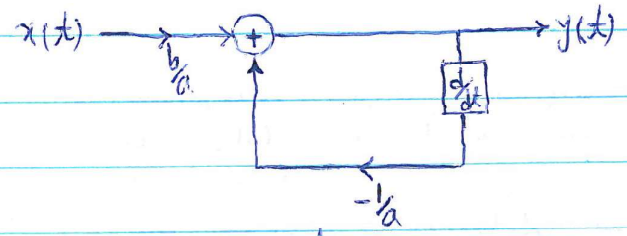
• بلوک‌های مقدماتی مورد نیاز برای نمایش بلوکی یک معادله دیفرانسیل عبارتند از:





مثال:

$$\frac{dy}{dt}+ay(t)=bx(t) \longrightarrow y(t)=-\frac{1}{a}\frac{dy}{dt}+\frac{b}{a}x(t)$$

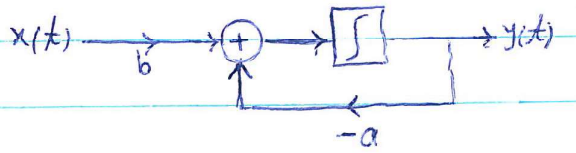


$$\frac{dy}{dt}=bx(t)-ay(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\frac{dy}{dt}dt=\int_{-\infty}^{t}(b(x(t)-ay(t))\,dt$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}(bx(t)-ay(t))\,dt$$

مشتق در مسیر back منفی
انتگرال در مسیر Forward می‌باشد.



منفرد تکین ← با بدنه اندازه کافی Δ در تابع $\delta_\Delta(t)$ کوچک شود تا به تابع $\delta(t)$ برسیم.

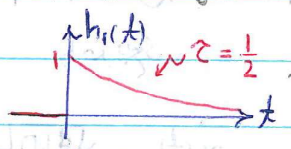


توابع ویژه : Singularity functions

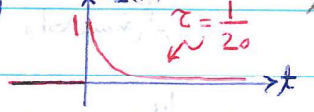
سیستم پیوسته ← سیستم پیوسته ← سیستم گسسته

مثال ← مثال 2-16 کتاب بررسی شود.

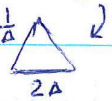
$$\frac{dy}{dt} + 2y(t) = x(t) \longrightarrow h_1(t) = e^{-2t}u(t)$$



$$\frac{dy}{dt} + 20y(t) = x(t) \longrightarrow h_2(t) = e^{-20t}u(t)$$



$x(t) = \delta_\Delta(t)$ ، $\delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$ ، $\delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$ ، $\delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$



$\Delta_1 < 0.0025$ ← پاسخ سیستم کندتر به هر چهار ورودی فوق یکسان است و به آن هر چهار ورودی یکسان هستند ولی پاسخ سیستم تندتر به چهار ورودی فوق متفاوت است

$\Delta_2 < 0.00025$ ← پاسخ هر دو سیستم به هر چهار ورودی یکسان است.

تعریف عملیاتی تابع ضربه واحد:

تابعی را تابع ضربه می‌گوییم که اگر پاسخ ضربه سیستم باشد خروجی سیستم به ازای هر ورودی دلخواه خود ورودی باشد.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\delta(t)} \longrightarrow x(t)$$

$$\forall x(t): \quad x(t) = x(t) * \delta(t)$$

($\delta(t)$: تابع ضربه)

اگر $x(t)=1$: $\quad 1 = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, d\tau$

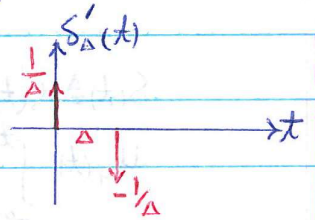
تابع دوبلت واحد:

$\delta'(t)$ مشتق تابع $\delta(t)$ است.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\delta'(t)} \longrightarrow \frac{dx}{dt}$$

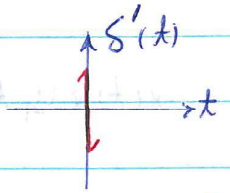
$$\forall x(t): \quad x(t) * \delta'(t) = \frac{dx}{dt}$$

($u_1(t)$ ← این علامت تقاضاست و همان مشتق است.)



$$\delta'(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta'_\Delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\delta_\Delta(t) - \delta_\Delta(t-\Delta)}{\Delta}$$

$$\delta_\Delta(t) = (u(t) - u(t-\Delta))\frac{1}{\Delta} \longrightarrow \delta'_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}(\delta(t) - \delta(t-\Delta))$$



$$x(t) * \delta'_\Delta(t) = x(t) * \frac{1}{\Delta}[\delta(t) - \delta(t-\Delta)] = \frac{1}{\Delta}[x(t) - x(t-\Delta)]$$

$$\lim_{\Delta \to 0} x(t) * \delta'_\Delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \left(\frac{x(t) - x(t-\Delta)}{\Delta}\right) = \frac{dx}{dt}$$

$$= x(t) * \left[\lim_{\Delta \to 0} \delta'_\Delta(t)\right]$$

سطح زیر نمودار تابع دوبلت صفر است.

تعریف عملیاتی تابع $u_2(t)$:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{u_2(t)} \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2}$$

براساس تعریف عملیاتی تابع $u_1(t)$

$$x(t) * u_2(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(x(t) * u_1(t))$$

$$= x(t) * u_1(t) * u_1(t)$$

$$u_2(t) = u_1(t) * u_1(t)$$

مشتق k ام تابع ضربه واحد

تعریف عملیاتی تابع $u_k(t)$:

$$x(t) * u_k(t) = \frac{d^k x}{dt^k}$$

$$u_k(t) = u_1(t) * u_{k-1}(t) = \underbrace{u_1(t) * u_1(t) * u_1(t) * \cdots * u_1(t)}_{k \text{ تا}}$$

$k-1$ بار کانوالو کردن از k تابع $u_1(t)$ است.

$$\delta(t) \triangleq u_0(t) \qquad u(t) \triangleq u_{-1}(t)$$

$$u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')\,dt' = \int_{-\infty}^{t} u_0(\tau)\,d\tau$$

$$u_{-2}(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{t'} x(\tau)\,d\tau\right)dt' = \left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right) * u_{-1}(t)$$

$$= x(t) * u_{-1}(t) * u_{-1}(t)$$

$$x(t) * u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

$$u_{-2}(t) = u_{-1}(t) * u_{-1}(t)$$

$$x(t) * u_{-k}(t) = \underbrace{\iiint \cdots \int}_{k \text{ تا}} x(\tau)\,d\tau$$

$$u_{-k}(t) = \underbrace{u_{-1}(t) * u_{-1}(t) * u_{-1}(t) * \cdots * u_{-1}(t)}_{k-1} = \int_{-\infty}^{t} u_{-k+1}(\tau)\,d\tau$$

$$\forall k, r \in \mathbb{Z} \;:\; u_k(t) * u_r(t) = u_{k+r}(t)$$

اگر k مثبت باشد k مشتق گیر به زنال هم‌سری شده‌اند.

اگر r مثبت باشد r انتگرال گیر به زنال هم‌سری شده‌اند.

فصل سوم:

موضوع: « نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب »

- جمع بندی فصل دوم کتاب:

۱) سختی محاسبه حاصل انتگرال یا جمع کانولوشن.

۲) استنتاج ویژگی های سیستم از روی پاسخ ضربه آن عموماً پیچیده است.

($\delta(t)$ در فصل دوم $S(t)$ بود.)

Φ_i (در فصل سوم سیگنال نمایی مختلط) $\xrightarrow{\delta(t)}$ LTI $\xrightarrow{h(t)}$ ψ_i ($h(t)$ در فصل دوم بود)

$$x(t)=\sum_i \alpha_i \Phi_i \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)=\sum_i \alpha_i \cdot \psi_i$$

- ویژگی های مورد نیاز برای توابع پایه Φ_i:

۱) امکان نوشتن هر سیگنال دلخواه به صورت ترکیب خطی توابع Φ_i (در فصل دوم (در مورد تابع ایکه برای موضوع بیشتر بحث داده ایم.)

۲) محاسبه خروجی متناظر Φ_i ها ساده باشد. (رابطه Φ_i و ψ_i ساده باشد.)

$$x(t) \triangleq e^{st}$$ s: مختلط

$$e^{st} \longrightarrow \boxed{LTI} \xrightarrow{h(t)} y(t)=?$$

تابع ویژه Eigan-function

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, d\tau = \underbrace{e^{st}}_{\text{ورودی از انتگرال خارج شد.}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau}_{H(s)}$$

$H(s)$: مقدار ویژه

تبدیل لاپلاس تابع $h(t)$ است.

s: فرکانس

برای یک s ثابت مثل s_0 خروجی سیستم ضریب ثابتی از ورودی سیستم (حالت سیگنال نمایی می باشد.

سیگنال نمایی یک تابع ویژه برای سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان و انتگرال کانولوشن می باشد.

- یک سیگنال متناوب را به صورت مجموع فرکانس هایی که آن را تشکیل داده اند می نویسیم و به حوزه فرکانس وارد می شویم.

شنبه ۸۱/۱۲/۱۰ – ۲-۳,۳,۱

پاسخ سیستم های LTI به توابع نمائی مختلط :

e^{st} ← عدد مختلط

$$e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, d\tau = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau}_{= H(s)}$$

e^{st} ← برای سیستم های LTI تابع ویژه است.

$$H(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau$$ ← تابع سیستم ← تبدیل لاپلاس

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$ تبدیل لاپلاس (دوطرفه)

$$x[n] = z^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

z^n ← عدد مختلط

$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} h[K]\, z^{n-K} = z^n \underbrace{\sum_{K=-\infty}^{\infty} h[K]\, z^{-K}}_{= H(z)}$$

$$H(z) \triangleq \sum_{K=-\infty}^{\infty} h[K]\, z^{-K}$$ تابع سیستم ← تبدیل Z

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$ ، تبدیل Z

$$x(t) = \sum_i \alpha_i e^{s_i t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \sum_i \alpha_i H(s_i)\, e^{s_i t}$$ ← دلخواه

$$x[n] = \sum_i \beta_i z_i^n \longrightarrow \boxed{H[n]} \longrightarrow y[n] = \sum_i \beta_i H(z_i)\, z_i^n$$

β_i ↑

- در فصل های ۳ و ۴ و ۵ قیدهای زیر را در نظر می گیریم:

$s \triangleq jw$ موهومی خالص

$z \triangleq e^{jw}$ اندازه واحد

مثال: سیستم تأخیر دهنده

$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = x(t-3)$ $\qquad h(t) = \delta(t-3)$

$x(t) = e^{j2t} \rightarrow y(t) = e^{j2(t-3)} = e^{-j6}\, e^{j2t}$

تابع ویژه ← مقدار ویژه $\rightarrow H(j2) = e^{-j6}$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-3)\, e^{-s\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-3)\, e^{-3s}\, d\tau$$

$$H(s) = e^{-3s} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-3)\, d\tau = e^{-3s}$$

$$H(s)\Big|_{s=j2} = e^{-3(j2)} = e^{-j6} \longrightarrow y(t) = H(s)\Big|_{s=j2}\, e^{j2t}$$

ترکیب خطی هارمونیک های سیگنال نمایی مختلط

$e^{jw_0 t}$: سیگنال متناوب با دوره تناوب T و سرعت زاویه w_0 دارد.

$$\Phi_K(t) = e^{jKw_0 t} = e^{jK\frac{2\pi}{T}t} \qquad K = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

هارمونیک Kام سیگنال مذکور، سیگنال متناوب با دوره تناوب $\frac{T}{K}$ و سرعت زاویه Kw_0 دارد.

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K\, \Phi_K(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K\, e^{jKw_0 t}$$

سیگنال متقابل یک سیگنال متناوب با دوره تناوب T می باشد.

$K = 0 \rightarrow 1$ سیگنال DC

$K = \pm1 \rightarrow e^{jw_0 t}, e^{-jw_0 t}$ هارمونیک اول سیگنال فوق

$K = \pm2 \rightarrow e^{j2w_0 t}, e^{-j2w_0 t}$ هارمونیک دوم سیگنال فوق

قضیه فوریه: هر سیگنال متناوب با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{w_0}$ (منفی دار) را می توان به صورت ترکیب خطی هارمونیک های سیگنال $e^{jw_0 t}$ نمایش داد. (با چندگروه یت مشخص)

نمایش سری فوریه سیگنال متناوب $x(t)$

$$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K\, e^{jw_0 tK}$$

• اگر $x(t)$ یک سیگنال حقیقی باشد: (همواره ترکیب خطی ضرایب تقارن هرمیتی دارند)

$$x(t) = x^*(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K^*\, e^{-jKw_0 t}$$

$K \triangleq -K'$

$$= \sum_{K'=-\infty}^{\infty} a_{-K'}^*\, e^{jK'w_0 t} \longrightarrow a_K = a_{-K}^*$$

"تقارن هرمیتی"

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k e^{jkw_0 t} + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jw_0 kt}$$ بنابراین می‌توان نوشت:

(در حالتی که سیگنال $x(t)$ حقیقی است.)

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} e^{-jkw_0 t} + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jw_0 kt}$$

$a_{-k} \to a_k^*$ (به عبارت مزدوج مختلط هستند.)

$$x(t) = a_0 + 2Re\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t} \right\}$$

(a_k عدد مختلط)

- $a_k \triangleq A_k e^{j\theta_k}$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} Re\left\{ A_k e^{j(kw_0 t+\theta_k)} \right\}$$

(در درس مدار دیده‌اید.)

$$\to x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kw_0 t+\theta_k)$$ «نمایش اندازه - فاز» فقط برای سیگنال‌های حقیقی

- $a_k = B_k + jC_k$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} Re\left\{ (B_k+jC_k)(\cos(kw_0 t)+j\sin(kw_0 t)) \right\}$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k \cos(kw_0 t) - C_k \sin(kw_0 t) \right]$$ «نمایش سینوس - کسینوس» فقط برای سیگنال‌های حقیقی

(نمایش کوآدراتیک)

محاسبه ضرایب a_k در سری فوریه:

$$\int_0^T e^{-jnw_0 t} x(t)\,dt = \int_0^T e^{-jnw_0 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t}\,dt$$

$$\int_0^T x(t) e^{-jnw_0 t}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^T e^{j(k-n)w_0 t}\,dt$$

سیگنال پریودیک با پریود T

$$\int_0^T e^{j(k-n)w_0 t}\,dt = \begin{cases} T & k=n \\ 0 & k\neq n \end{cases}$$

$k-n$ ام سیگنال نمایی مختلط هارمونی

سطح زیر دو (یا چند) پریود صحیح سیگنال صفر است.

$$\int_0^T x(t)\, e^{-jnw_0 t}\, dt = a_n \cdot T \longrightarrow a_K = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jKw_0 t}\, dt$$

(a to $a+T$)

a_Kها را ضرایب طیفی سیگنال $x(t)$ نامند.

رابطه آنالیز

$$a_K = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jKw_0 t}\, dt$$

انتگرال را روی یک پریود T حساب می‌شود

رابطه سنتز

$$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K\, e^{jKw_0 t}$$

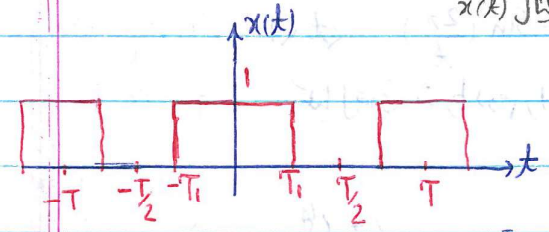
نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب پیوسته:

$K = \pm 1 \rightarrow$ هارمونیک اول (اصلی) سیگنال

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, dt$$

$x(t)$ متوسط سیگنال DC یا offset

مثال: $x(t)$ سیگنال زوج است



برای یک دوره تناوب

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$a_K = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} \underbrace{1}_{x(t)}\, e^{-jKw_0 t}\, dt =$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

$$K \neq 0 : \quad a_K = \frac{1}{T}\left.\frac{e^{-jKw_0 t}}{-jKw_0}\right)_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{-jKw_0 T}\left(e^{-jw_0 KT_1} - e^{jw_0 KT_1}\right)$$

$w_0 T = 2\pi$

$-2j\sin(Kw_0 T_1)$

$$K \neq 0 : \quad a_K = \frac{\sin Kw_0 T_1}{K\pi}$$

$$a_K = \begin{cases} \dfrac{\sin Kw_0 T_1}{K\pi} & K \neq 0 \\ \dfrac{2T_1}{T} & K = 0 \end{cases}$$

محاسبه ضرایب سری فوریه

شرایط دیریشله (شرایط کافی) برای برقراری سری فوریه:

شرط اصلی ← ۱) سیگنال $x(t)$ بر روی هر دوره تناوبش مطلقاً انتگرال پذیر باشد.

$$\int_T |x(t)|\,dt < \infty$$

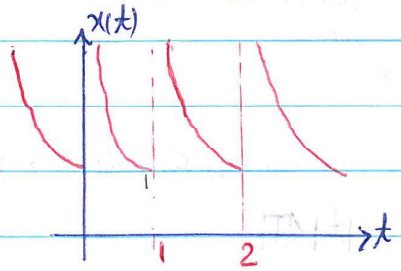
شرط کافی ونه لازم

در این صورت هم a_k ها هم وجود دارند هم همگرا هستند.

۲) تعداد ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های سیگنال $x(t)$ در هر دوره تناوب متناهی (صفر و) باشد.

۳) در هر فاصله زمانی متناهی از سیگنال، تعداد ناپیوستگی‌ها و اندازه ناپیوستگی‌ها متناهی باشد.

(درباره سیگنال‌های واقعی این مشکل وجود ندارد پیش می‌آید.)



$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)$ $\quad 0 < t < 1$

شرط اول را دارد.

$x'(t) = \frac{-2\pi}{t^2}\cos\left(\frac{2\pi}{t}\right) = 0$

$\frac{2\pi}{t} = K\pi + \frac{\pi}{2}$

$t = \frac{2}{K+\frac{1}{2}} = \frac{4}{1+2K}$

$K \gg 2 \rightarrow 0 < t = \frac{4}{1+2K} < 1$

سیگنال فوق شرط دوم را ندارد.

$x(t) = \frac{1}{t}$ $\quad 0 < t < 1$

این سیگنال مطلقاً انتگرال پذیر نمی‌باشد.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 4 \\ \frac{1}{2} & 4 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4} & 6 \leq t < 7 \\ \frac{1}{8} & 7 \leq t < 7.5 \\ \vdots \end{cases}$$

دوره تناوب آن ۸ است

این سیگنال شرط سوم را ندارد. (در هر دوره تعداد نامتناهی نقاط ناپیوستگی)

ویژگی های سری فوریه پیوسته:

سیگنال متناوب ← ضرایب طیفی

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$ «رابطه سنتز»

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$ «رابطه آنالیز»

۱) خاصیت خطی بودن این سری:

$$\left.\begin{matrix} x_1(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \\ x_2(t) \xleftrightarrow{FS} b_k \end{matrix}\right\} \rightarrow \alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t) \xleftrightarrow{FS} \alpha_1 a_k+\alpha_2 b_k=c_k$$

هر دو سیگنال باید دارای دوره متناوب یکسان باشند

هر دو سیگنال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ متناوب با دوره تناوب T می باشند.

سیگنال حاصل دارای دوره تناوب T یا کمتر از آن می باشد.

۲) شیفت زمانی این سری:

برای شیفت زمانی سیگنال تغییری حاصل نمی شود ولی فاز آن تغییر می کند.

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \Rightarrow x(t-t_0) \xleftrightarrow{FS} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = b_k \qquad |a_k|=|b_k|$$

(اثبات)

$$b_k=\frac{1}{T}\int_T x(t-t_0)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt \underset{t-t_0 \triangleq t'}{=} \frac{1}{T}\int_T x(t')\,e^{-jk\omega_0(t'+t_0)}\,dt' = e^{-jk\omega_0 t_0}a_k$$

سیگنال متناوب حقیقی زوج است ← ضرایب طیفی هم زوج است

اگر سیگنال حقیقی و زوج باشد: ضرایب طیفی یک سیگنال زوج است $a_k=a_{-k}$

اگر سیگنال حقیقی و فرد باشد: ضرایب طیفی یا سیگنال کسینوسی آن فرد است $a_k=-a_{-k}$

۳) وارونگی زمانی این سری:

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \Rightarrow x(-t) \xleftrightarrow{FS} a_{-k}$$

اثبات آن به کمک رابطه سنتز به سادگی انجام می شود

سیگنال زوج $x(t)$ ← ضرایب a_k زوج

سیگنال فرد $x(t)$ ← ضرایب a_k فرد

۴) تغییر مقیاس زمانی این سری:

با جمع شدن سیگنال به خود سیگنال فرکانس بیشتری برای سیگنال ایجاد می شود.

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \Rightarrow x(\alpha t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$\omega_0' = \alpha\omega_0$ ← $T'=\frac{T}{\alpha}$ ← دوره تناوب آن کوچک می شود

ضرایب a_k تغییری نمی کند

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow x(\alpha t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0' t}$$

این خاصیت هم دوگان است.

۵) ضرب دو سیگنال و سری‌های آنها:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k \\ y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k \end{array}\right\} \longrightarrow x(t)\,y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l\, b_{k-l}$$

این خاصیت دوگان است.

حاصلضرب دو سیگنال در میدان زمان با کانولوشن آن دو سیگنال در میدان فرکانس برابر است.

کانولوشن ضرایب $x(t)$ و $y(t)$ است.

(اثبات)

$$h_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,y(t)\,e^{-jkw_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_T \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l\, e^{jlw_0 t}\right) y(t)\, e^{-jkw_0 t}\,dt$$

$x(t)$ را بیرون انتگرال می‌بریم

جابجایی $\int \leftrightarrow \sum$

$$h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \frac{1}{T}\int_T y(t)\, e^{-j(-l+k)w_0 t}\,dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l\, b_{k-l}$$

دوگان این خاصیت نیز برقرار است:

$$x(t) * y(t) \longrightarrow a_k\, b_k$$

۶) تقارن هرمیتی در این سری:

(کاربرد شدید اساسی)

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k \Longrightarrow x^*(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{-k}^*$$

مزدوج مختلط

(اثبات)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jkw_0 t} \longrightarrow x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^*\, e^{-jkw_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^*\, e^{jkw_0 t}$$

- اگر سیگنال $x(t)$ حقیقی باشد:

$$a_k = a_{-k}^* \leftrightarrow a_k^* = a_{-k}$$

a_0 یک کمیت حقیقی خواهد بود. $\rightarrow a_0 = a_0^*$

- اگر سیگنال $x(t)$ حقیقی زوج هم باشد:

$$a_k = a_{-k}$$

ضرایب طیفی حقیقی و زوج خواهد داشت.

(نسبت به پارامتر k)

- اگر سیگنال $x(t)$ حقیقی، فرد هم باشد:

$$a_k = -a_{-k}$$

ضرایب طیفی کاملاً موهومی و فرد خواهد داشت.

(نسبت به پارامتر k)

۷) رابطه یا رسوال (Parseval's relation):

رابطه توان یا انرژی سیگنال را بر اساس ضرایب فوریه آن بیان می‌کند.

$$\frac{1}{T}\int_{T} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

(توان سیگنال (متوسط))

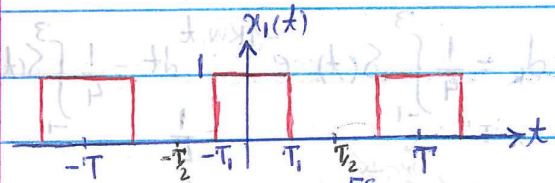
خاصیت ضرب: رابطه پارسوال برای ضرب دو سیگنال و سری‌های آنها تغییرات زیر را اعمال می‌کنیم: (اثبات)

$$y(t) \triangleq x^*(t) \longrightarrow \frac{1}{T}\int_{T} x(t)\, x^*(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l\, a^*_{-(k-l)}$$

$$k=0 \longrightarrow \frac{1}{T}\int_{T} |x(t)|^2 dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l\, a^*_l = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_l|^2$$

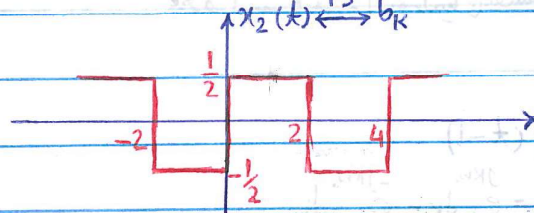
- نقیض خواص ویژگی‌های سری فوریه را از جدول کتاب بررسی کنید.

مثال:

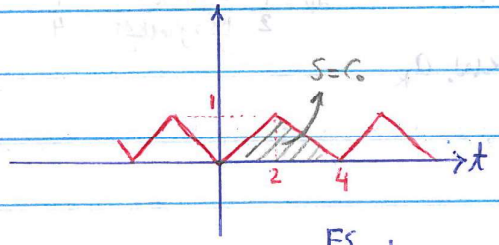


$$x_1(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} & k \neq 0 \\ \dfrac{2T_1}{T} & k = 0 \end{cases}$$

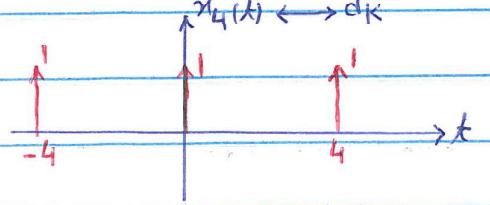


$$a_k = \mathrm{Sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)\cdot\frac{\omega_0 T_1}{\pi}$$



$$a_k = \frac{2T_1}{T}\mathrm{Sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)$$

$$\begin{cases} T \triangleq 4 \rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{2} \\ T_1 \triangleq 1 \end{cases} \rightarrow x_2(t) = x_1(t-1) - \frac{1}{2}$$

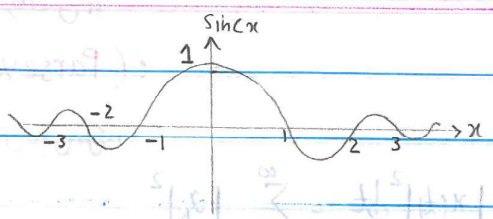


$$x_1(t-1) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k\, e^{-jk\omega_0}$$

$$\frac{1}{2} \overset{FS}{\longleftrightarrow} \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} & k=0 \\ a'_k = 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$Sinc\ x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

این تابع برازای جمیع مقادیر صحیح x به جز $x=0$ برابر صفر است.



$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{2} Sinc\left(\frac{k}{2}\right) e^{-jk\frac{\pi}{2}} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

سیگنال انتگرال سیگنال باید متناوب باشد. لذا لزوما مقدار DC سیگنال اصلی باید صفر باشد. پس حتما با ید مساوی صفر شود

$$x_3(t) = \int x_2(\tau) d\tau \longrightarrow C_k = \frac{b_k}{jk\omega_0}$$

$\frac{\pi}{2}$

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{jk\pi} Sinc\left(\frac{k}{2}\right) e^{-jk\frac{\pi}{2}} & k \neq 0 \\ \frac{1}{2} = \frac{2}{4} & k = 0 \end{cases}$$

مقدار DC سیگنال دیاپازون برابر با ارتفاع یک پریود

$$x_4(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-4n) \Rightarrow d_k = \frac{1}{4}\int_{T} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} \delta(t)\, dt = \frac{1}{4}$$

شرط کافی در سیگنال برقرار نیست.

تعداد نقاط ناپیوستگی سیگنال نباید بی نهایت باشد

یک پریود

همه ضرایب طیفی برابر و یکسان هستند.

$$T = 4 \quad T_1 = 1$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_4(t+1) - x_4(t-1)$$

$1 \quad -1$

$$jk\omega_0 a_k = e^{jk\omega_0} d_k - e^{-jk\omega_0} d_k$$

$$a_k = \frac{1}{2} Sinc\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$d_k = \frac{1}{2} \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} \frac{jk\frac{\pi}{2}}{2j\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{4}$$

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \longrightarrow a'_k = jk\omega_0 a_k$$

۸۱/۱۲/۱۴ - ۲-۳-۳-۵ جلسه پنجم

سیگنال $e^{jw_0 n}$ به شرطی متناوب است که w_0 ضریب گویایی از 2π باشد.

N دوره تناوب سیگنال است. $w_0 = \frac{2\pi}{N}$

نمایش سری فوریه سیگنال‌های گسسته:

$$\Phi_K = e^{jK\frac{2\pi}{N}n} \qquad K = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$$

$$\Phi_K[n] = \Phi_{K+rN}[n] \qquad \forall K, r \in \mathbb{Z}$$

هم‌ها هارمونیک‌هایی با دوره تناوب N را دارند.

لذا ترکیب خطی این هارمونیک‌ها یک سیگنال متناوب با دوره تناوب N خواهد بود.

لذا هر سیگنال گسسته متناوب با دوره تناوب N می‌توان با ترکیب خطی هارمونیک‌های این سیگنال گسسته نمایش داد.

$$x[n] = \sum_{K=0}^{N-1} a_K e^{jK\frac{2\pi}{N}n}$$

«رابطه سنتز»

این سیگنال در حالت کلی متناوب هیچ شرطی بر a_K ندارد.

برای هر سیگنال گسسته متناوب با دوره تناوب N

لزومی ندارد که K از صفر تا $N-1$ باشد.

بلکه هر N هارمونیک متوالی این سیگنال می‌توانند کار کرده شوند.

N معادله مستقل با N مجهول a_0 و a_1 و ... و a_{N-1} به دست می‌آید.

$$\begin{cases} x[0] = \sum_{K=0}^{N-1} a_K \\ x[1] = \sum_{K=0}^{N-1} a_K e^{jK\frac{2\pi}{N}} \\ \vdots \\ x[N-1] = \sum_{K=0}^{N-1} a_K e^{jK\frac{2\pi}{N}(N-1)} \end{cases}$$

$$x[n] = \sum_{K=\langle N\rangle} a_K e^{jK\frac{2\pi}{N}n}$$

N عدد متوالی روی یک دوره تناوب

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=\langle N\rangle} \left(\sum_{K=\langle N\rangle} a_K e^{jK\frac{2\pi}{N}n} \right) e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \sum_{K=\langle N\rangle} a_K \left(\sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(K-r)\frac{2\pi}{N}n} \right)$$

m

$$\sum_{n=\langle N\rangle} e^{jm\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N & m \overset{N}{\equiv} 0 \\ 0 & m \overset{N}{\neq} 0 \end{cases}$$

$m \overset{N}{\neq} 0$:

$$\sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} e^{jm\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n'=0}^{N-1} e^{jm\frac{2\pi}{N}(n'+n_0)} = e^{jm\frac{2\pi}{N}n_0} \cdot \frac{1 - e^{jm2\pi}}{1 - e^{jm\frac{2\pi}{N}}} = 0$$

$n - n_0 = n'$

$m \overset{N}{\neq} 0$: $\neq 0$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} = N a_r$$

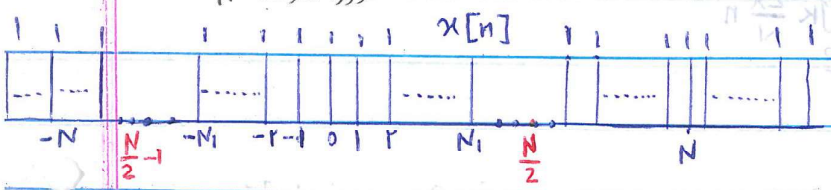
رابطه آنالیز
$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

رابطه سنتز
$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$x[n] = a_0\Phi_0[n] + a_1\Phi_1[n] + a_2\Phi_2[n] + \cdots + a_{N-1}\Phi_{N-1}[n]$$
$$= a_1\Phi_1[n] + a_2\Phi_2[n] + a_3\Phi_3[n] + \cdots + a_N\Phi_N[n]$$
$$a_0\Phi_0[n] = a_N\Phi_N[n]$$

$$a_k = a_{k+rN} \quad \forall r\in Z$$

تکرار (سیگنال متناوب با دوره تناوب N)



مثال:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \underset{n'\triangleq n+N_1}{=} \frac{1}{N}\sum_{n'=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n'-N_1)} = \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}}{N}\,\frac{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$$

$$a_k = \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}}{N}\,\frac{e^{-jk\frac{\pi}{N}(2N_1+1)}\left(e^{jk\frac{\pi}{N}(2N_1+1)} - e^{-jk\frac{\pi}{N}(2N_1+1)}\right)}{e^{-jk\frac{\pi}{N}}\left(e^{jk\frac{\pi}{N}} - e^{-jk\frac{\pi}{N}}\right)}$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{2N_1+1}{N} & k \overset{N}{\equiv} 0 \\ \dfrac{1}{N}\,\dfrac{\sin k\frac{\pi}{N}(2N_1+1)}{\sin k\frac{\pi}{N}} & k \overset{N}{\not\equiv} 0 \end{cases}$$

متناوب است

دوره تناوب‌های مختلف ولی مضرین از هم دارند

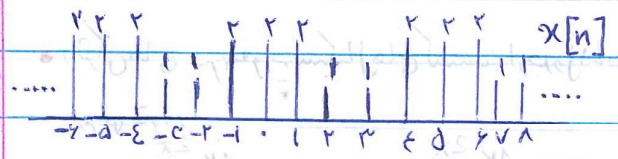
• ویژگی‌های سری فوریه سیگنال‌های گسسته از جدول زیر بررسی شود.

تبدیل فوریه گسسته ↖ $x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$ ← تبدیل سری فوریه گسسته

دوگان مشتق ↖ $x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{FS} a_k - a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}} = a_k\left(1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)$ ← تفریق اول

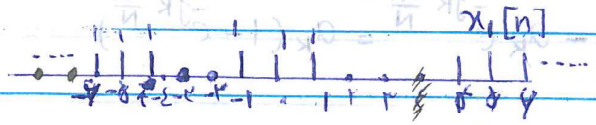
رابطه پارسوال: $\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}|x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle}|a_k|^2$

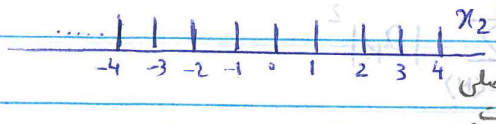
مثال:



$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$

$x_1[n] \xleftrightarrow{FS} a_K$





برای این محاسبات الزاماً باید آن را ۵ در نظر بگیریم.

$$a_K = \begin{cases} \frac{1}{N}\frac{\sin\left[K\frac{\pi}{N}(2N_1+1)\right]}{\sin\left[K\frac{\pi}{N}\right]} & K \overset{N}{\neq} 0 \\ \frac{2N_1+1}{N} & K \overset{N}{\equiv} 0 \end{cases}$$

$x_2[n] \xleftrightarrow{FS} b_K$

$x[n] \xleftrightarrow{FS} c_K$

$c_K = a_K + b_K$

$N=5$

$N_1=1$

$$a_K = \begin{cases} \frac{1}{5}\frac{\sin\left(\frac{3K\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{K\pi}{5}\right)} & K \overset{5}{\neq} 0 \\ \frac{3}{5} & K \overset{5}{\equiv} 0 \end{cases}$$

$$b_K = \frac{1}{5}\sum_{n=\langle 5\rangle_0}^{4} e^{-jK\frac{2\pi}{5}n} = \begin{cases} 1 & K \overset{5}{\equiv} 0 \\ 0 & K \overset{5}{\neq} 0 \end{cases} = \frac{1}{5}\frac{1-e^{-jK2\pi}}{1-e^{-jK\frac{2\pi}{5}}}$$

این سیگنال فقط یک مولفه DC دارد

$$c_K = \begin{cases} \frac{8}{5} & K \overset{5}{\equiv} 0 \\ \frac{1}{5}\frac{\sin\left(\frac{3K\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{K\pi}{5}\right)} & K \overset{5}{\neq} 0 \end{cases}$$

($\frac{1}{5}$ همان a_K)

مثال:

- سیگنال $x[n]$ دارای دوره تناوب $N=6$ است.
- متوسط سیگنال $x[n]$ برابر ۲ است. $\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2$
- $\sum_{n=2}^{7} (-1)^n x[n] = 1$
- سیگنال $x[n]$ مورد نظر سیگنالی با کمترین توان است که در سه شرط فوق صدق کند.

با توجه به اطلاعات فوق سیگنال $x[n]$ را بیابید.

$$x[n] = \sum_{K=\langle 6\rangle} a_K e^{jK\frac{2\pi}{6}n}$$

(فرمول سنتز سری فوریه سیگنال / وضع الف مسئله)

جدولات این سیگنال a_0 و a_1 و a_2 و a_3 و a_4 و a_5 یا هر ۶ ضریب طیفی متوالی این سیگنال می‌باشد

مرور آنالیز سری فوریه سیگنال

$$a_k = \frac{1}{6}\sum_{n=\langle 6\rangle} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{6}n}$$

فرض دوم مسئله

- $a_0 = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

فرض سوم مسئله

- $a_3 = \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7} x[n]\, e^{-j\pi n} = \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7} x[n]\,(-1)^n = \frac{1}{6}$

فرض چهارم مسئله

قضیه پارسوال: $P_\infty = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$ ← اندازه ضرایب طیفی

توان سیگنال $x[n]$ در یک دوره تناوب است.

$\Rightarrow a_1 = 0 \;,\; a_4 = 0$

$a_2 = 0 \;,\; a_5 = 0$

در این سؤال توان سیگنال min است. $P_{\infty_{min}} = a_0^2 + a_3^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$

$$x[n] = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{j\pi n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-1)^n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{6} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

دوره تناوب آن 2 می‌باشد.

ضرایب طیفی آن، چهار مقدار ضرایب طیفی سیگنال قبل را دارند.

دوره تناوب سیگنال باید بر یک عدد بزرگتر از یک تقسیم شود.

این دو کار با تغییر دادن دوره تناوب یک سیگنال (چند برابر کردن آن) انجام می‌شود.

decimation → نمونه‌برداری از ضرایب طیفی یک سیگنال به طوری که صفرهای آن حذف شود.

interpolation → اضافه کردن تعدادی صفر به ضرایب طیفی یک سیگنال بدون تغییر مقادیر ناصفر آن.

دوره تناوب سیگنال باید در یک عدد صحیح بزرگتر از یک ضرب شود.

سری فوریه و سیستم‌های LTI:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jkw_0)\, e^{jkw_0 t}$$

b_k ضرایب سری فوریه سیگنال $y(t)$ است.

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \xrightarrow{z_0^n} \boxed{LTI} \xrightarrow{H(z_0)z_0^n} y[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k H\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

b_k ضرایب طیفی سیگنال $y[n]$ است.

تابع ویژه

سیستم LTI مولفه فرکانسی جدیدی تولید نمی‌شود.

خروجی یک سیستم LTI حداکثر همان مولفه‌های ورودی را دارند که البته وزن آن مولفه‌ها ممکن است تغییر کند.

تمارین هرسینی وجود دارد

سیگنال حقیقی است

$\frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t})$ $\quad$ $\frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t})$

مثال:

$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t$

$h(t) = e^{-t}u(t)$ $\longrightarrow$ $y(t) = ?$

پاسخ ضربه نامحدود، لذا سیستم IIR است

$\frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t})$

$w_0 = 2\pi$

$x(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{j2\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi t} + \frac{1}{3}e^{j6\pi t} + \frac{1}{3}e^{-j6\pi t}$

$a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_{-1} = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_{-2} = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{1}{3}$, $a_{-3} = \frac{1}{3}$ $\longrightarrow$ $a_K = 0$ سایر موارد، برای هر K

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-jwt}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-jwt}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+jw)t}\, dt$$

$e^{jw\infty}$ صورت است و نامعلوم

$$H(jw) = \left.\frac{e^{-(1+jw)t}}{-(1+jw)}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{1+jw}$$

$b_0 = a_0 H(0) = a_0 = 1$

$b_1 = b_{-1} = a_{\pm 1} H(\pm j2\pi) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1 \pm j2\pi}\right)$

$b_{\pm 2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 \pm j4\pi}\right)$, $b_{\pm 3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 \pm j6\pi}\right)$

$= a_{\pm 2} H(\pm j4\pi)$ $\quad$ $= a_{\pm 3} H(j6\pi)$

$b_K = 0$ سایر موارد، برای هر K

مثال: $x[n] = \cos\frac{2\pi}{N}n$, $h[n] = \alpha^n u[n]$, $|\alpha| < 1$

سیگنال حقیقی است

تمارین هرسینی وجود دارد

$y[n] = ?$

$x[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right)$

$$a_K = \begin{cases} \frac{1}{2} & K = \pm 1 \\ 0 & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-jw})^n$$

(آنرا به آن یک است)

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-jw}}$$

$$b_1 = a_1 H(e^{j\frac{2\pi}{N}}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}}\right)$$

$$b_1 = b_{-1}^*$$

$$b_{-1} = a_{-1} H(e^{-j\frac{2\pi}{N}}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}}}\right)$$

$b_K = 0$ بقیه ضرایب

سیستم‌های LTI می‌توانند به عنوان صافی یا فیلتر عمل کنند. برخی مولفه‌های ورودی را حذف می‌کنند. مولفه جدیدی ایجاد می‌کنند. برخی مولفه‌های ورودی را تقویت می‌کنند.

نام سیستم‌های LTI را فیلتر می‌گذاریم.

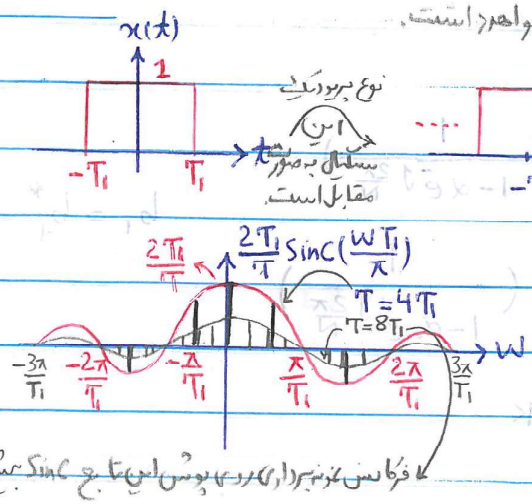
۸۱/۱۲/۱۹ - ۲-۳/۳/۱۰ دوشنبه

فصل چهارم:

موضوع: «تبدیل فوریه پیوسته»

شرط کافی

اگر سیگنال x سیگنال انرژی باشد لزوماً تبدیل فوریه خواهد داشت.



$\tilde{x}(t) \xleftrightarrow{FS} a_K \qquad T > 2T_1$

$$a_K = \frac{2T_1}{T}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{Kw_\circ T_1}{\pi}\right) = \frac{2T_1}{T}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{wT_1}{\pi}\right)\Big|_{w=Kw_\circ}$$

فرکانس عدد پریودار در پوش این تابع Sinc بیشتر می‌شود.

$$a_1 = \frac{wT_1}{\pi} = \frac{2\pi T_1}{4T_1\pi} = \frac{1}{2} = \frac{K\frac{2\pi}{T}T_1}{4\frac{\pi}{T_1}} = \frac{K}{2}$$

$$a_1' = \frac{2\pi T_1}{8T_1\pi} = \frac{1}{4}$$

$T \to \infty \Rightarrow w_\circ \to 0$ (از عدد پریودار خارج شده پوش آن را به طور کلی می‌سازد)

طیف پیوسته‌ای به دست می‌آید که همان تابع Sinc می‌باشد.

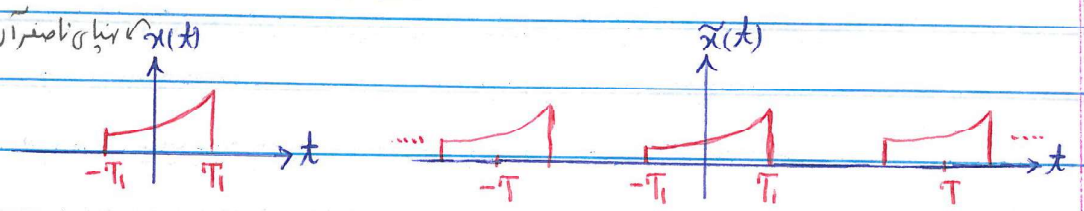
پوش $a_K T$ می‌باشد

$$2T_1\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{wT_1}{\pi}\right) \triangleq X(jw)$$

طیف سیگنال $x(t)$ است.

غیر پریودیک

$$a_K = \frac{1}{T}X(jw)\Big|_{w=Kw_\circ}$$



بنابراین ناصفر آن محدود است

$$\tilde{x}(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K e^{jKw_\circ t} \qquad \left(\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$a_K = \frac{1}{T}\int_{T} \tilde{x}(t)\, e^{-jKw_\circ t}\, dt$$

($x(t)$ یک پریود از $\tilde{x}(t)$ است. به جز $-T_1$ تا T_1 (نقیض tها) $x(t)=0$ است)

$$a_K = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jKw_\circ t}\, dt$$

تبدیل فوریه

$$X(jw) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

$$a_K = \frac{1}{T}X(jKw_\circ)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}X(jKw_\circ)\, e^{+jKw_\circ t}$$

$$T = \frac{2\pi}{w_\circ} \to \frac{1}{T} = \frac{w_\circ}{2\pi}$$

$$\lim_{T\to\infty} \tilde{x}(t) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ w_0\to 0}} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jkw_0)\, e^{jkw_0 t}\, w_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw$$

$w_0 \to dw$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \to \int_{-\infty}^{+\infty}$

$kw_0 \to w$

• حتی اگر بتوان سیگنال $x(t)$ را نامتغیر بودن محدود نباشد این رابطه معتبر است. تعداد محاسباتی که برای آنالیز می‌توان انجام داد بسیار است.

مجموع غیرقابل شمارش

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dtw$$

طیف سیگنال

سیگنال $x(t)$ را با ترکیب خطی آنها تشکیل داد بی نهایت و غیرقابل شمارش است

رابطه سنتز

$$X(jw) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

رابطه آنالیز یا تبدیل فوریه

مسیری برای به دست آوردن ضرایب طیفی سیگنال‌های پریودیک به ما می‌دهد.

$$a_k = \frac{1}{T} X(jkw_0)$$

ارتباط بین طیف سیگنال غیر پریودیک و ضرایب طیفی سیگنال پریودیک متناظر آن

سیگنال‌های پریودیک هم سری فوریه و هم تبدیل فوریه دارند.

همگرایی تبدیل فوریه:

شرایط کافی برای وجود تبدیل فوریه یک سیگنال $x(t)$ عبارتند از: (یعنی سیگنال انرژی است.)

۱) سیگنال $x(t)$ به طور مطلق انتگرال پذیر باشد. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < +\infty$

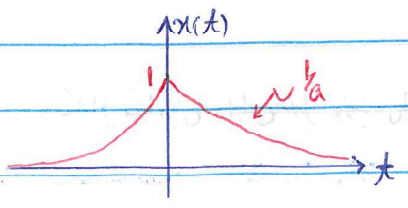
۲) در هر فاصله متناهی از سیگنال $x(t)$ تعداد ماکزیمم‌های و مینیمم‌های آن محدود باشد.

۳) در هر فاصله متناهی از سیگنال $x(t)$ تعداد ناپیوستگی‌های سیگنال (و همچنین تعداد آنها) محدود باشد.

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(jw)$$

مثال:

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$



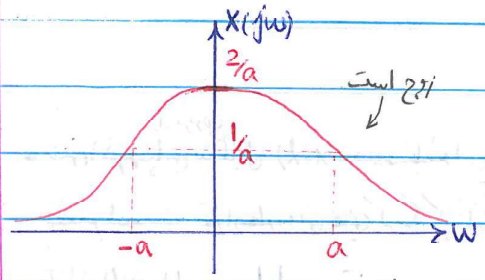
$$X(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}\, e^{-jwt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-jw)t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+jw)t}\, dt$$

$$X(j\omega) = \frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega}$$

$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$x(t)$ حقیقی و زوج ⟵ $X(j\omega)$ حقیقی و زوج



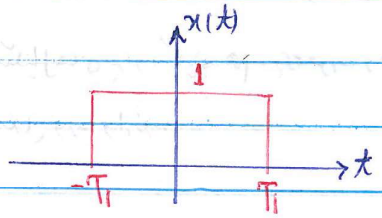
این سیگنال شرط سوم کافی آن حالت را ندارد.

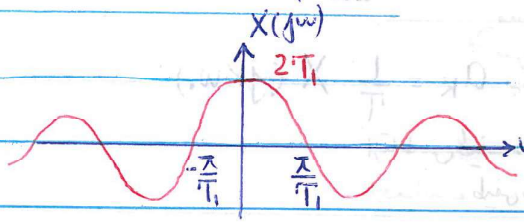
مثال:

$x(t) = \delta(t)$ (حدود بیت از نظر مقدار)

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

مثال:





$T_1 \to \infty$ ⟵ $X(j\omega)$ حالت Flat می‌شود.

سیگنال مطلقاً انتگرال‌پذیر نیست.

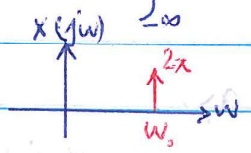
مثال:

$x(t) = e^{j\omega_0 t}$

$X(j\omega) = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$ ← ثابت کنید

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\omega_0)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\omega_0)\, e^{j\omega_0 t}\, d\omega$$

سیگنال تک‌هارمونی است که دامنه‌اش ثابت است ↖ $x(t) = e^{j\omega_0 t}$



هر سیگنال متناوبی دارای تبدیل فوریه می‌باشد.

تبدیل فوریه سیگنال های متناوب:

تبدیل فوریه یک سیگنال پریودیک، مجموع تعدادی ضربه است.

~~$x(t) \longleftrightarrow$~~

$$x(t) = e^{jw_0 t} \xleftrightarrow{F} X(jw) = 2\pi\delta(w-w_0)$$

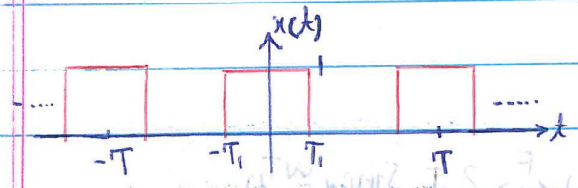
$$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K e^{jKw_0 t} \xleftrightarrow{F}{?} X(jw) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} 2\pi a_K \delta(w-Kw_0)$$

در زیر این مطلب اثبات می شود:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{K=-\infty}^{\infty} 2\pi a_K \delta(w-Kw_0)\, e^{jwt}\, dw$$

$$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(w-Kw_0)\, e^{jKw_0 t}\, dw = \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K e^{jKw_0 t}$$

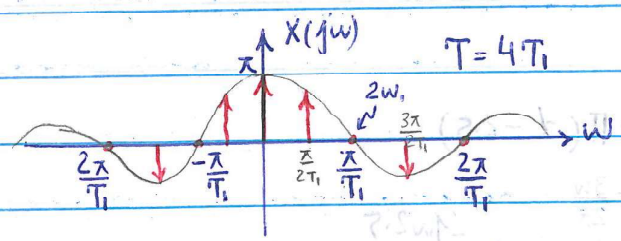
مثال:



$$x(t) \xleftrightarrow{Fs} a_K$$

$$a_K = \frac{2T_1}{T}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{Kw_0 T_1}{\pi}\right)$$

$$X(jw) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi T_1}{T}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{Kw_0 T_1}{\pi}\right)\delta(w-Kw_0)$$

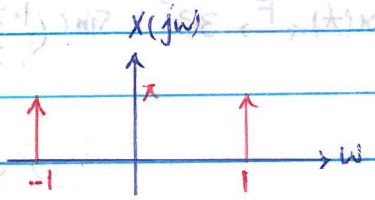


$T = 4T_1$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4T_1} = \frac{\pi}{2T_1}$$

مثال:

$$x(t) = \cos t = \frac{1}{2}e^{jt} + \frac{1}{2}e^{-jt}$$



$$X(jw) = \pi\delta(w-1) + \pi\delta(w+1)$$

سه‌شنبه ۸۲/۱/۱۴ - ۲۰۰۳/۴/۱

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(jw)\,e^{jwt}\,dw \quad , \quad X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,e^{-jwt}\,dt$$

$$x(t)\xleftrightarrow{F}X(jw)$$

طیف پیوسته

ویژگی‌های تبدیل فوریه:

$\forall a,b$: $ax(t)+by(t)\xleftrightarrow{F}aX(jw)+bY(jw)$

۱) خطی بودن تبدیل فوریه: فاز آن تغییر می‌کند.

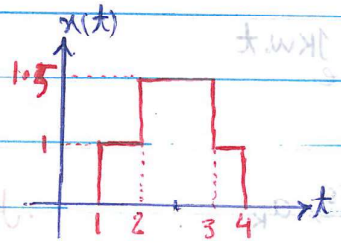
$\forall t_0$: $x(t-t_0)\xleftrightarrow{F}e^{-jwt_0}X(jw)$

۲) شیفت زمانی تبدیل فوریه: روی اندازه تبدیل فوریه تأثیری نمی‌گذارد. فاز آن را به طور خطی تغییر می‌دهد.

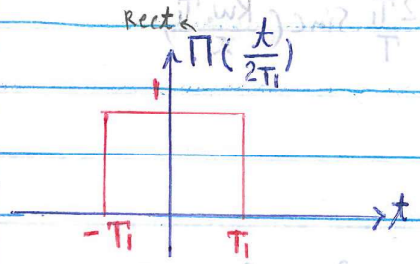
$$x(t-t_0)\xleftrightarrow{F}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-t_0)\,e^{-jwt}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,e^{-jw(\tau+t_0)}\,d\tau=e^{-jwt_0}X(jw)$$

$\tau \triangleq t-t_0$

مثال:



$x(t)\xleftrightarrow{F}?$



$$\Pi\left(\frac{t}{2T_1}\right)\xleftrightarrow{F}2T_1\,Sinc\left(\frac{wT_1}{\pi}\right)$$

$$x(t)=\Pi\left(\frac{t-2.5}{3}\right)+\frac{1}{2}\Pi(t-2.5)$$

$$x(t)\xleftrightarrow{F}3e^{-jw2.5}\,Sinc\left(\frac{1.5w}{\pi}\right)+\frac{1}{2}e^{-jw2.5}\,Sinc\left(\frac{w}{2\pi}\right)$$

$\frac{3w}{2\pi}$

۳) مزدوج بودن و تقارن هرمیتی (سمی‌آمیز) در تبدیل فوریه:

$$x(t)\xleftrightarrow{F}X(jw)\Longrightarrow x^*(t)\xleftrightarrow{F}X^*(-jw)$$

از دو طرف رابطه سنتز مزدوج گیری می‌کنیم.

$$x^*(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X^*(jw)\,e^{-jwt}\,dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X^*(-jw)\,e^{jwt}\,dw$$

$w\triangleq -w$

• اگر سیگنال $x(t)$ حقیقی باشد:

$$X^*(-jw) = X(jw)$$

تقارن هرمیتی

$$X^*(jw) = X(-jw)$$

$(x(t)\ \text{Real})$

$$X(jw) = Re\{X(jw)\} + jIm\{X(jw)\}$$

$$X(jw) = X^*(-jw)$$

$$X^*(-jw) = Re\{X(-jw)\} - jIm\{X(-jw)\}$$

∴ بخش حقیقی تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی تابعی زوج از w است و بخش موهومی آن تابعی فرد از w است.

$(x(t)\ \text{Real})$

$$X(jw) = |X(jw)|\, e^{j\angle X(jw)}$$

$$= X^*(-jw) = |X(-jw)|\, e^{-j\angle X(-jw)}$$

∴

$$\angle X(jw) = -\angle X(-jw) \qquad |X(jw)| = |X(-jw)|$$

قدر مطلق (اندازه) تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی تابعی زوج از w است و فاز آن تابعی فرد از w است.

• اگر سیگنال $x(t)$ حقیقی و زوج هم باشد: تبدیل فوریه آن حقیقی خواهد بود که نسبت به w زوج است.

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos wt\, dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin wt\, dt$$

(زوج × فرد نسبت به t = فرد نسبت به t؛ فرد × فرد نسبت به t = زوج نسبت به t؛ انتگرال تابع فرد = ۰)

∴ تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی و زوج، خود یک سیگنال حقیقی و زوج از w خواهد بود.

• اگر سیگنال $x(t)$ حقیقی و فرد هم باشد:

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos wt\, dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin wt\, dt$$

(فرد × زوج نسبت به t = فرد نسبت به t؛ زوج × زوج نسبت به t = زوج نسبت به t؛ انتگرال تابع فرد = ۰)

∴ تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی و فرد، خود یک سیگنال موهومی محض و فرد از w است.

حقیقی

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

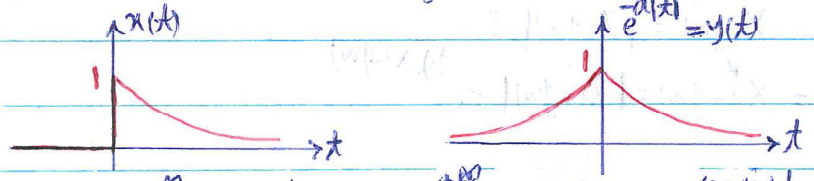
زوج و حقیقی — فرد و موهومی محض

$$x_e(t) \xleftrightarrow{F} F\{x_e(t)\} \qquad x_o(t) \xleftrightarrow{F} F\{x_o(t)\}$$

$$F\{x(t)\} = F\{x_e(t)\} + F\{x_o(t)\}$$

$$x_e(t) \xleftrightarrow{F} Re\{X(jw)\} \qquad x_o(t) \xleftrightarrow{F} j\,Im\{X(jw)\}$$

مثال: از روی تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a>0$ تبدیل فوریه سیگنال $e^{-a|t|}$ را بدست آورید.



$$X(jw) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-jwt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+jw)t}\,dt = \frac{e^{-(a+jw)t}}{-(a+jw)}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+jw}$$

$$X(jw) = \frac{1}{a+jw} \times \frac{a-jw}{a-jw} = \frac{a}{a^2+w^2} - j\frac{w}{a^2+w^2}$$

$$F\{x_e(t)\} = \frac{a}{a^2+w^2}$$

$$y(t) = 2\,x_e(t)$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left(x(t)+x(-t)\right)$$

$$Y(jw) = \frac{2a}{a^2+w^2}$$

۵) مشتق و تبدیل فوریه:

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(jw) \Rightarrow \frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{F} jw\,X(jw)$$

از طرفین رابطه سنتز مشتق می گیریم.

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)\,e^{jwt}\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)\,jw\,e^{jwt}\,dw$$

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(jw) \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{X(jw)}{jw} + \pi X(0)\,\delta(w)$$

سیگنال DC می تواند ناصفر باشد.

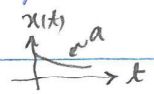
در سری فوریه این مقدار DC باید صفر می بود تا سیگنال انتگرال پذیر هم پریود شود باشد

مثال:

$$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1 \Rightarrow u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{jw} + \pi\delta(w)$$

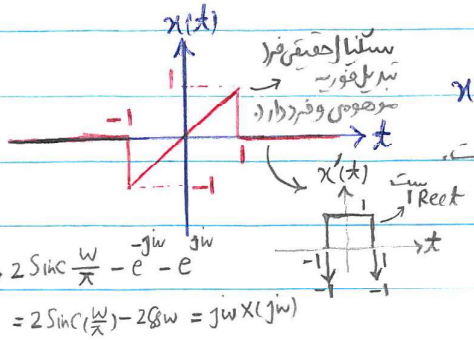
$X(0)=1$

فرض می‌کنیم $u(t)$ همان جایی است که در بی‌نهایت.



$\lim_{a\to\infty} x(t) = u(t)$

مثال:



$x(t) \xleftrightarrow{F} ?$

روش اول حل مسئله روش مستقیم با استفاده از انتگرال جزء به جزء است.

$$\frac{dx}{dt} \xleftrightarrow{F} 2\,\mathrm{Sinc}\frac{w}{\pi} - e^{-jw} - e^{jw}$$

$$= 2\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{w}{\pi}\right) - 2\cos w = jw\,X(jw)$$

$$X(jw) = \frac{2j}{w}\left(\cos w - \mathrm{Sinc}\left(\frac{w}{\pi}\right)\right)$$

هم‌زمان با هم

۶) تغییر مقیاس زمانی و فرکانسی:

قضیه $x(t) \xleftrightarrow{F} X(jw) \longrightarrow x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{jw}{a}\right)$

سیگنال $a>1$ سیگنال زمانی سریعتر داشته و منقبض شده و افزایش باند سیگنال طیف آن منبسط می‌شود و طیف آن وسیع‌تر می‌شود.

$$a=-1 \rightarrow x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-jw)$$

وارون زمانی — وارون فرکانسی

$$F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)\, e^{-jwt}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-jw\frac{\tau}{a}}\, d(\tau/a)$$

$at \triangleq \tau$

$$a>0 : \quad F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} x(\tau)\, e^{-j\frac{w}{a}\tau}\, d\tau = \frac{1}{a} X\left(j\frac{w}{a}\right)$$

$$a<0 : \quad F\{x(at)\} = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1}{a} x(\tau)\, e^{-j\frac{w}{a}\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{a} x(\tau)\, e^{-j\frac{w}{a}\tau}\, d\tau$$

منفی است

$$= -\frac{1}{a} X\left(j\frac{w}{a}\right)$$

$$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw$$

: (Duality) دوگانی

$x(t) \xleftrightarrow{F} X(jw)$ ، $X(t) \xleftrightarrow{F} ?$

به جای t متغیر w و به جای w متغیر t را قرار می‌دهیم

$$X(t)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-jt\tau}\, d\tau$$

$$F\{X(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-jt\tau}\, d\tau\right) e^{-jwt}\, dt=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jt\tau}\, e^{-jwt}\, dt}_{2\pi\delta(w+\tau)}\right) d\tau$$

$$F\{e^{jw_0 t}\}=2\pi\delta(w-w_0)$$

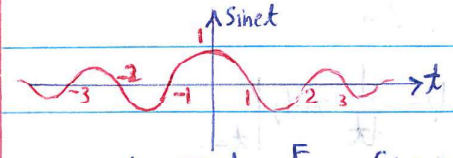
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x(-w)\,2\pi\,\delta(w+\tau)\,d\tau$$

$$=2\pi\, x(-w)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(w+\tau)\,d\tau$$

$$=2\pi x(-w)$$

مثال:

$x(t)=\mathrm{Sinc}\, t$



$$x(t)=\Pi(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{Sinc}\left(\frac{w}{2\pi}\right) \xrightarrow{\text{تغییر مقیاس}} \Pi\left(\frac{t}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{F} 2\pi\,\mathrm{Sinc}(w)$$

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{jw}{a}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\Pi\left(\frac{t}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{F} \mathrm{Sinc}\, w$$

$$\xrightarrow[\text{دوگانی}]{\text{خاصیت}} \mathrm{Sinc}\, t \xleftrightarrow{F} \Pi\left(\frac{-w}{2\pi}\right) \longrightarrow X(jw)=\Pi\left(\frac{w}{2\pi}\right)$$

(تابع زوج)

مثال:

$$g(t)=\frac{2}{1+t^2}$$

$$e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+w^2} \qquad e^{-|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2}{1+w^2}$$

$$\frac{2}{1+t^2} \xleftrightarrow{F} 2\pi\, e^{-|-w|} = 2\pi\, e^{-|w|}$$

(زوج)

رابطه پارسوال:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

انرژی کل سیگنال

این رابطه بیان می‌کند که انرژی آنی سیگنال‌های پریودیک در حوزه سیگنال‌ها همانند می‌شود.

$|X(j\omega)|^2$ چگالی انرژی

انرژی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,x^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega\right)^* dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt\right)}_{X(j\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

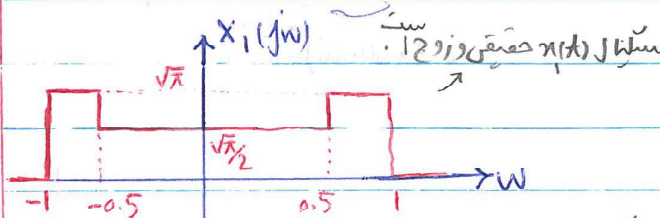
رابطه رایلی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y^*(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\,Y^*(j\omega)\,d\omega$$

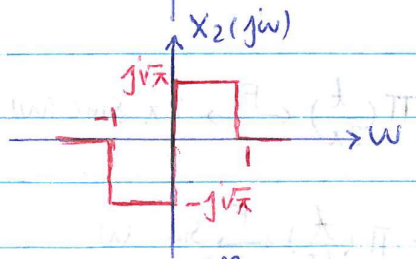
مزدوج انرژی متقابل

مثال: انرژی و مشتق در لحظه صفر سیگنال‌های زیر را بیابید.

سیگنال $x_1(t)$ حقیقی و زوج است.



سیگنال $x_2(t)$ حقیقی و فرد است.



$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$D = \frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0}$$

$$E_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X_1(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{0.5} \frac{\pi}{4}\,d\omega + \int_{0.5}^{1} \pi\,d\omega\right) = \frac{1}{4}(0.5-0)+(1-0.5) = \frac{5}{8}$$

$$E_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X_2(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \pi\,d\omega = 1$$

$$g(t) = \frac{dx}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega) = G(j\omega)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \longrightarrow g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)\,d\omega$$

$$D_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} jw\, X_1(jw)\,dw = 0$$

(jw: فرد، X_1: زوج)

$$D_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} jw\, X_2(jw)\,dw = \frac{1}{\pi}\int_0^{1} jw\, j\sqrt{\pi}\,dw = \frac{-1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{w^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}$$

ویژگی کانولوشن و تبدیل فوریه:

$$y(t) \triangleq x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F} Y(jw) = X(jw)\,H(jw)$$

($y(t)$: خروجی سیستم)

$$Y(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x(t)*h(t))\,e^{-jwt}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau\right)e^{-jwt}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)\,e^{-jwt}\,dt\right)d\tau = H(jw)\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\,e^{-jw\tau}\,d\tau$$

($\int h(t-\tau)e^{-jwt}dt$: شبیه فرم سنتال $h(t)$ است. $= e^{-jw\tau}H(jw)$)

$$= H(jw)\,X(jw)$$

$$x(t) \to \boxed{h_1(t)} - \boxed{h_2(t)} \to y(t) \equiv x(t) \to \boxed{h(t)} \to y(t)$$

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \qquad H(jw) = H_1(jw)\,H_2(jw)$$

با شرایط کافی دیریشله (وجود شرایط اول) را داشته باشد.

$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\,dt < \infty$ ← مطلقاً انتگرال‌پذیری

شرط لازم و کافی پایداری سیستم مذکور

وجود سیستم‌های پایدار تبدیل فوریه وجود دارد ← وجود سیستم‌های ناپایدار این کار بعید است.

فلسفه معرفی تبدیل لاپلاس آن است که چیزی مشابه پاسخ فرکانسی برای سیستم‌های ناپایدار در اختیار داشته باشیم.

(در حوزه S)

مثال:

$$F\left\{\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau\right\} = ?$$

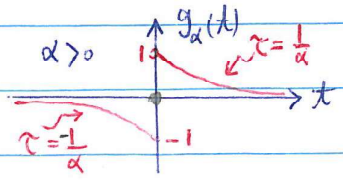
سنتال نیز زمانی که انتگرال‌پذیر نیست ← انتگرال‌پذیر

$$x(t) \to \boxed{h(t)=u(t)} \to y(t) = \int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau$$

$$Y(jw) = X(jw)\,F\{u(t)\}$$

$$u(t) = \frac{1}{2}(1 + Sgn(t))$$

$$Sgn(t) = \begin{cases} -1 & t<0 \\ 0 & t=0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$



$$g_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t>0 \\ 0 & t=0 \\ -e^{\alpha t} & t<0 \end{cases}$$

$$Sgn(t) = \lim_{\alpha\to 0} g_\alpha(t)$$

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{\alpha}{\alpha^2+w^2} - \frac{jw}{\alpha^2+w^2} \quad , \quad \alpha > 0$$

سیگنال $g_\alpha(t)$ دوبرابر بخش فرد سیگنال $x(t)$ است.

$$g_\alpha(t) \xleftrightarrow{F} \frac{-j2w}{\alpha^2+w^2}$$

$$F\{sgn(t)\} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{-j2w}{\alpha^2+w^2} = \frac{-j2}{w} = \frac{2}{jw}$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \xleftrightarrow{F} 2\pi \delta(-w) = 2\pi\delta(w)$$

تابع زوج

$$F\{u(t)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{jw} + 2\pi\delta(w)\right) = \frac{1}{jw} + \pi\delta(w)$$

$$Y(jw) = X(jw)\left(\frac{1}{jw} + \pi\delta(w)\right) = X(jw)\frac{1}{jw} + \pi X(jw)\delta(w)$$

$$Y(jw) = \frac{X(jw)}{jw} + \pi X(0)\delta(w)$$

دیگر ضرب (مدولاسیون) : دوران و تبدیل فوریه

$$r(t)=s(t)p(t) \xleftrightarrow{F} R(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[S(j\omega)*P(j\omega)\right]$$

اثبات با استفاده از دو روش (روش کلی و روش معمول):

$$s(t)\xleftrightarrow{F}S(j\omega) \qquad p(t)\xleftrightarrow{F}P(j\omega)$$

$$S(t)\xleftrightarrow{F}2\pi s(-\omega) \qquad P(t)\xleftrightarrow{F}2\pi p(-\omega)$$

↓ دوگانی ↓ دوگانی

$$S(-t)\xleftrightarrow{F}2\pi s(\omega) \qquad P(-t)\xleftrightarrow{F}2\pi p(\omega)$$

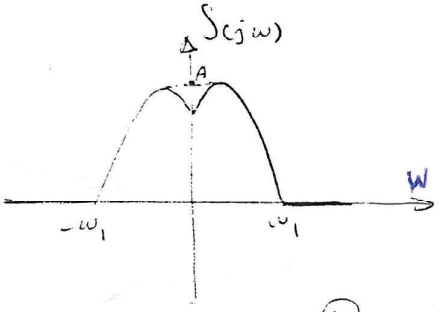
$$S(-t)+P(-t)\xleftrightarrow{F}4\pi^2 p(\omega)s(\omega)$$

$$4\pi^2 p(t)s(t)\xleftrightarrow{F}2\pi S(j\omega)*P(j\omega)$$

مثال: مدولاسیون دامنه

$s(t)$ یک سیگنال نوعی با پهنای باند محدود

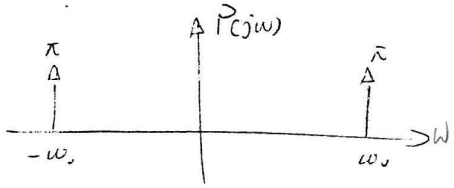
$$p(t)=\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right)$$

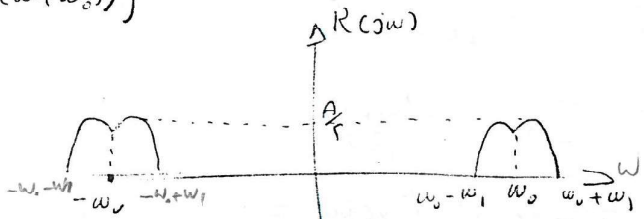


$$r(t)=s(t)p(t)=s(t)\cdot\frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right]$$

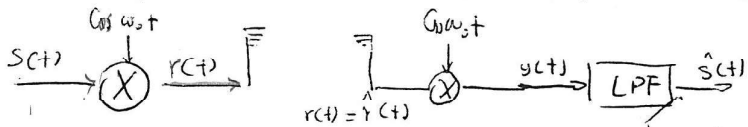
$$P(j\omega)=\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right] \qquad R(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[S(j\omega)*P(j\omega)\right] \quad (1)$$

$$R(j\omega)=\frac{1}{2}\left[S(j(\omega-\omega_0))+S(j(\omega+\omega_0))\right]$$





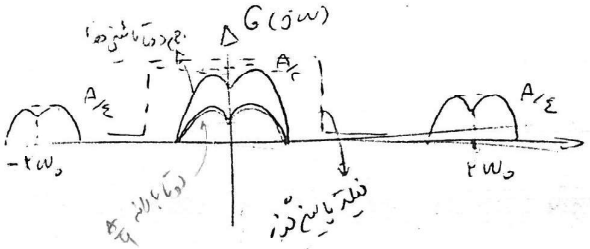
$\omega_0 \ll \omega_1$



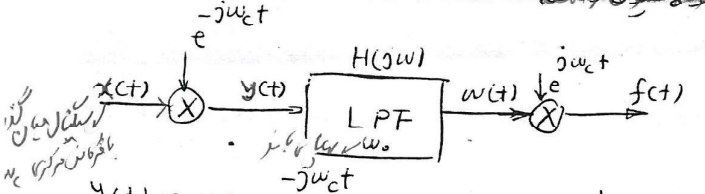
بازه در آن سیگنال وزن می‌شود.

$$G(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}S(j(\omega-\omega_0))+\frac{1}{2}S(j(\omega+\omega_0))\right]*\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

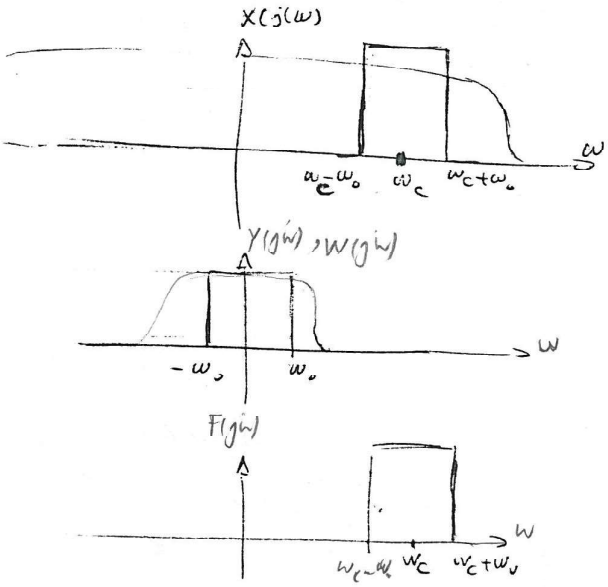
$$G(j\omega)=\frac{1}{4}S(j\omega)+\frac{1}{4}S(j(\omega-2\omega_0))+\frac{1}{4}S(j(\omega+2\omega_0))$$



تحقق یک فیلتر میان گذر با استفاده از یک LPF و مدولاسیون دامنه



$$y(t) = x(t)e^{-j\omega_c t} \rightsquigarrow Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * 2\pi\delta(\omega+\omega_c) = X(j(\omega+\omega_c))$$



$$f(t) = w(t)e^{j\omega_c t}$$

$$F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} W(j\omega) * 2\pi\delta(\omega-\omega_c) = W(j(\omega-\omega_c))$$

سیستم توصیف شده با معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

حالت اولیه صفر = شرط اول در پاسخ

با فرض پایداری، شرایط کافی برای وجود تبدیل فوریه یا تبدیل فوریه برقرار است.

$$\rightsquigarrow F\left\{\sum a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = F\left\{\sum b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

خاصیت خطی تبدیل فوریه $\rightsquigarrow \sum a_k F\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum b_k F\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$

$$\Rightarrow \sum a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$\rightsquigarrow \Rightarrow Y(j\omega)\sum a_k (j\omega)^k = X(j\omega)\sum b_k (j\omega)^k$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum b_k (j\omega)^k}{\sum a_k (j\omega)^k} = H(j\omega)}$$

تبدیل فوریه پاسخ ضربه

سیستم‌های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت:

اگر سیستم شرط اولیه صفر داشته باشد خطی و تغییرناپذیر با زمان می‌باشد.

شرط دیریشله کافی را دارد.

مطلقاً انتگرال‌پذیر ← پاسخ ضربه سیستم LTI

$$\sum_{K=0}^{N} a_K \frac{d^K y(t)}{dt^K} = \sum_{K=0}^{M} b_K \frac{d^K x(t)}{dt^K}$$

با فرض پایداری برای این سیستم شرط کافی برای وجود تبدیل فوریه پاسخ ضربه سیستم برقرار است.

← از طرفین تساوی فوق تبدیل فوریه گرفته از خاصیت خطی آن بهره می‌بریم.

$$\sum_{K=0}^{N} a_K F\left\{\frac{d^K y(t)}{dt^K}\right\} = \sum_{K=0}^{M} b_K F\left\{\frac{d^K x(t)}{dt^K}\right\}$$

$$\sum_{K=0}^{N} a_K (j\omega)^K Y(j\omega) = \sum_{K=0}^{M} b_K (j\omega)^K X(j\omega)$$

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{K=0}^{M} b_K (j\omega)^K}{\sum_{K=0}^{N} a_K (j\omega)^K} = H(j\omega)$$

با توجه به خاصیت کانولوشن

پاسخ فرکانسی یک کلاس گویا است. که با این کلاس‌های جزئی خوب کار می‌کند.

پاسخ فرکانسی

روش حالب به دست آوردن پاسخ ضربه سیستم LTI معادلات دیفرانسیل توصیف کننده سیستم

تبدیل فوریه ← پاسخ فرکانسی سیستم ← تبدیل فوریه معکوس ← پاسخ ضربه سیستم

سیستم مرتبه دوم

مثال: سیستم LTI زیر پایدار می‌باشد پاسخ ضربه سیستم را بیابید.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y(t) = \frac{dx}{dt} + 2x(t)$$

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^1 + 2}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} = \frac{A}{j\omega+3} + \frac{B}{j\omega+1}$$

$$A = (j\omega+3)\,H(j\omega)\Big|_{j\omega=-3} = \frac{j\omega+2}{j\omega+1}\Big|_{j\omega=-3} = \frac{1}{2}$$

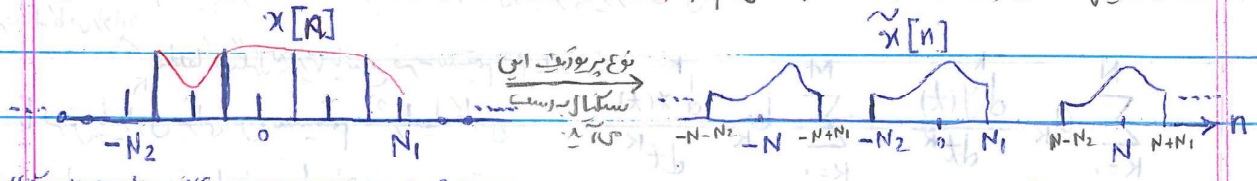
$$B = (j\omega+1)\,H(j\omega)\Big|_{j\omega=-1} = \frac{j\omega+2}{j\omega+3}\Big|_{j\omega=-1} = \frac{1}{2}$$

$$H(j\omega) = \frac{0.5}{j\omega+3} + \frac{0.5}{j\omega+1} \longrightarrow h(t) = 0.5\left(e^{-3t} + e^{-t}\right)u(t)$$

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega+a}$$

موضوع: «تبدیل فوریه گسسته»

«Discrete-time Fourier transform» تفاوت‌های خاصی با هم دارند e^{jwt} و e^{jwn} سیگنال‌های



سیگنال پریودیک است چون سیگنال متناوب است

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

رابطه سنتز — n عدد متوالی

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

رابطه آنالیز

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_2}^{N_1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

سیگنال $x[n]$ خارج این بازه هیچ عدد ناصفری ندارد.

$$X(e^{jw}) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jwn}$$

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jwt} dt$$

$$a_k = \frac{1}{N} X\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right)$$

$$N = \frac{2\pi}{w_0} \rightarrow \frac{1}{N} = \frac{w_0}{2\pi}$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} X\left(e^{jkw_0}\right) e^{+jkw_0 n} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} X\left(e^{jkw_0}\right) e^{jkw_0 n} w_0$$

$N \rightarrow \infty$: $w_0 \rightarrow 0 \Rightarrow w_0 \rightarrow dw$ — گپ بین دو عدد متوالی

$\sum \rightarrow \int$, $kw_0 \rightarrow w$

$Nw_0 \rightarrow 2\pi$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{jw}\right) e^{jwn} dw$$

فرمول سنتز

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw) e^{jwt} dw$$

$$X\left(e^{jw}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jwn}$$

فرمول آنالیز

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jwt} dt$$

e^{jw}: یک سیگنال پریودیک با پریود 2π نسبت به w است.

n: سیگنال مورد نظر گسسته است.

یک سیگنال پریودیک با پریود 2π نسبت به w می‌باشد.

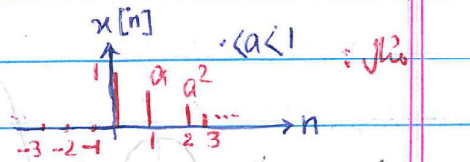
اما طیف آن پیوسته است. (بعد از تبدیل شمارش مولفه فرکانسی دارد.)

(مضارب فرد π مولفه‌های فرکانس بالای آن وجود دارند.) ← (مضارب زوج π مولفه‌های فرکانس پایین آن وجود دارند.)

سیگنال سمت راست

$$x[n] = a^n u[n] \quad , \quad |a| < 1$$

مثال:

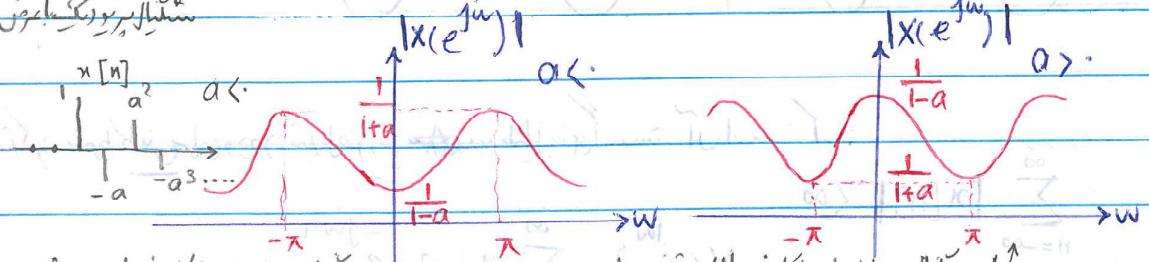


$0 < a < 1$

سیگنال متقارن است

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-jw})^n = \frac{1}{1 - ae^{-jw}} \rightarrow |X(e^{jw})| = \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos w}}$$

سیگنال پریودیک با دوره 2π



این سیگنال مولفه های فرکانس پایین بیشتری دارد

این سیگنال مولفه های فرکانس بالا بیشتری دارد

تبدیل فوریه سیگنال های گسسته همواره پریودیک است و پریود آن نیز 2π است.

مثال:

$$x[n] = a^{|n|} \qquad |a| < 1$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \underbrace{a^{-n} e^{-jwn}}_{(ae^{jw})^{-n}} + \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-jw})^n = \sum_{n=1}^{\infty} (ae^{jw})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-jw})^n$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{\substack{n'=0 \\ n'=n-1}}^{\infty} (ae^{jw})^{n'+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-jw})^n = ae^{jw} \frac{1}{1-ae^{jw}} + \frac{1}{1-ae^{-jw}}$$

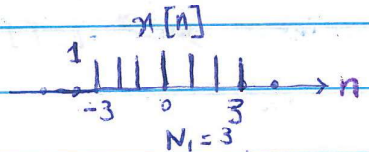
$$X(e^{jw}) = \frac{ae^{jw} - a^2 + 1 - ae^{jw}}{1 - ae^{-jw} - ae^{jw} + a^2} = \frac{1-a^2}{1-2a\cos w + a^2}$$

کف حقیقی برای سیگنال زوج به دست آمد.

طیف آن فرکانس های پایین را بیشتر در خود دارد. $a > 0$

طیف آن فرکانس های آن حوالی مضرب های فرد π هستند $a < 0$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le N_1 \\ 0 & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

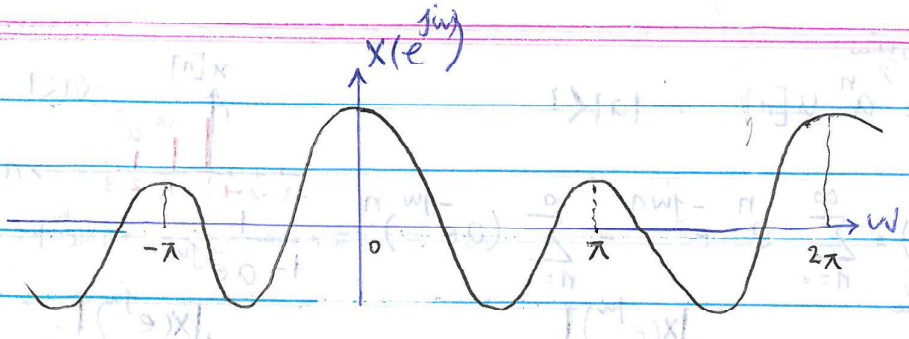


سیگنال مستطیلی

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jwn} = \sum_{n'=0}^{2N_1} e^{-jw(n'-N_1)} = \frac{e^{jwN_1}(1 - e^{-jw(2N_1+1)})}{1 - e^{-jw}}$$

$$X(e^{jw}) = \frac{e^{jwN_1} e^{-jw(N_1+\frac{1}{2})} (e^{jw(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-jw(N_1+\frac{1}{2})})}{e^{-jw/2}(e^{jw/2} - e^{-jw/2})} = \frac{\sin w(N_1+\frac{1}{2})}{\sin \frac{w}{2}}$$

$n' = n + N_1$



تذکر: شرط کافی برای وجود تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته آن است که:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn}$$

سیستم LTI به کمک یک معادله دیفرانسیل خطی ضرایب ثابت توصیف می‌شود

هر معادله دیفرانسیل خطی ضرایب ثابت توصیف کننده رفتار یک سیستم LTI نیست

شرط اول صفر باشد

شرط اول صفر باشد

شرط اول صفر باشد

سیستم در لحظه صفر شرط اولیه صفر دارد و ورودی علی (t) اعمال می‌شود یعنی $x=0$ کی

شرط اول صفر باشد

کدام سیستم LTI که رفتار آن توسط معادله دیفرانسیل خطی ضرایب ثابت توصیف می‌شود

سیستم LTI هست

دوشنبه ۸۲/۱/۲۵ - ۲۰۰۳/۴/۱۴

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jwn} \qquad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jw})\, e^{jwn}\, dw$$

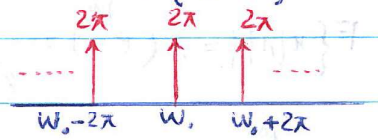
تبدیل فوریه دنباله‌های متناوب:

$$F\{e^{jw_0 t}\} = 2\pi\,\delta(w-w_0)$$

$$F\{e^{jw_0 n}\} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(w-w_0-2\pi l)$$

سکانال پریودیک با پریود 2π

با پریود 2π پریودیک با پریود



$$F^{-1}\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(w-w_0-2\pi l)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(w-w_0-2\pi l)\, e^{jwn}\, dw$$

چون $0 < w_0 < 2\pi$

$$= \int_{w_0-\pi}^{w_0+\pi} \delta(w-w_0)\, e^{jwn}\, dw = e^{jw_0 n}\int_{w_0-\pi}^{w_0+\pi}\delta(w-w_0)\,dw$$

$$= e^{jw_0 n}$$

$$F\{e^{jw_0 n}\} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(w-w_0-2\pi l)$$

خطی بودن تبدیل فوریه

$$F\{x[n]\} = F\left\{\sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right\} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, F\{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\}$$

$w_0 = k\frac{2\pi}{N}$

پریودیک

$$= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta\left(w-k\frac{2\pi}{N}-2\pi l\right)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} a_k\,\delta\left(w-\frac{2\pi}{N}(k+Nl)\right)$$

$k+Nl \triangleq k'$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_{k'-Nl}\,\delta\left(w-\frac{2\pi k'}{N}\right)$$

بسط کلی سری فوریه

پریودیک هستند

$a_{k'-Nl}$ عدد صحیح دلخواه

$$a_{k'} = a_{k'-Nl'} \qquad a_l = a_{l+kN} \;\; \forall k,l$$

$$F\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_k\,\delta\left(w-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

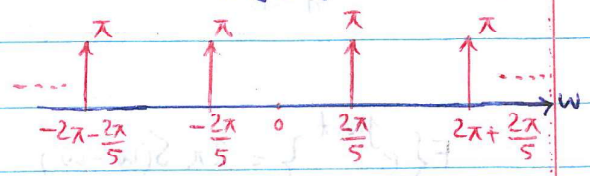
پریودیک

مثال:

$$x[n] = \cos w_0 n \quad , \quad w_0 = \frac{2\pi}{5}$$

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{5}n} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{5}n}$$

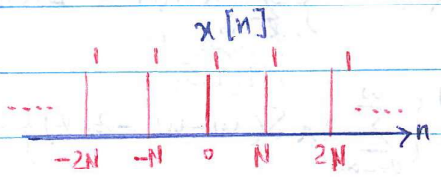
$X(e^{jw})$



$$F\{x[n]\} = X(e^{jw}) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \pi\left(\delta\left(w-\frac{2\pi}{5}-2\pi\ell\right) + \delta\left(w+\frac{2\pi}{5}-2\pi\ell\right)\right)$$

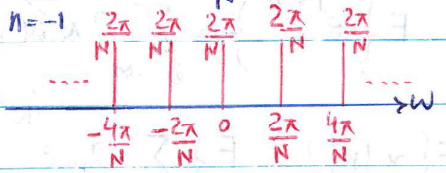
مثال:

$$x[n] = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta[n-KN]$$



$$Na_K = \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jK\frac{2\pi}{N}n}$$

$$Na_k = \sum_{n=-1}^{N-2} \delta[n]\, e^{-jK\frac{2\pi}{N}n} \longrightarrow a_K = \frac{1}{N}\sum_{n=-1}^{N-2} \delta[n] = \frac{1}{N} \quad X(e^{jw})$$



$$X(e^{jw}) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{N}\, \delta\left(w-\frac{2\pi}{N}K\right)$$

ویژگی های تبدیل فوریه گسسته:

۱) خاصیت تناوبی تبدیل فوریه گسسته:

$$X(e^{jw}) = X(e^{j(w+2\pi K)})$$

۲) خاصیت خطی بودن تبدیل فوریه گسسته:

$$\forall a_1, a_2: \quad a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \xleftrightarrow{F} a_1 X_1(e^{jw}) + a_2 X_2(e^{jw})$$

۳) خواص شیفت زمانی و شیفت فرکانسی تبدیل فوریه گسسته:

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-jwn_0} X(e^{jw})$$

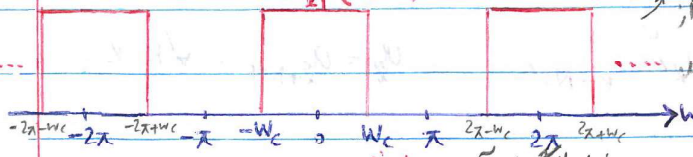
$$e^{jw_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(w-w_0)})$$

فرکانس‌های حول مضارب زوج π فرکانس‌های پایین و فرکانس‌های حول مضارب فرد π فرکانس‌های بالا را آشکار می‌کند.

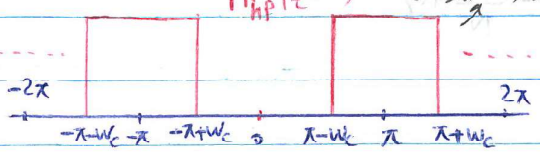
مثال:

$H_{lp}(e^{jw})$

فیلتر پایین گذر ایده‌آل: فقط فرکانس‌های کمتر از w_c را عبور می‌دهد و بقیه را حذف می‌کند.



$H_{hp}(e^{jw})$ فیلتر بالاگذر ایده‌آل.



تبدیل فوریه عکس

$$H_{hp}(e^{jw}) = H_{lp}(e^{j(w-\pi)})$$

$$h_{hp}[n] = h_{lp}[n]\, e^{j\pi n} = (-1)^n h_{lp}[n]$$

۴) خاصیت مزدوج بودن و تقارن هرمیتیک تبدیل فوریه گسسته:

$$x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-jw})$$

$$X(e^{jw}) = X^*(e^{-jw})$$

- اگر سیگنال $x[n]$ حقیقی باشد:

برای این سیگنال حقیقی: اندازه و قسمت حقیقی آن تابع زوجی از w است.
فاز و قسمت موهومی آن تابع فردی از w است.

$$x_e[n] \xleftrightarrow{F} Re\{X(e^{jw})\}$$

$$x_o[n] \xleftrightarrow{F} j\,Im\{X(e^{jw})\}$$

۵) تفاضل و انباشتگی (در تبدیل فوریه گسسته):

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{F} (1-e^{-jw})X(e^{jw})$$

(زیرا ضرایب در 2π تکرار می‌شود.)

$$\sum_{K=-\infty}^{n} x[K] \xleftrightarrow{F} \frac{X(e^{jw})}{1-e^{-jw}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(w-2\pi K)$$

مثال:

$$\delta[n] \xleftrightarrow{F} 1 \Rightarrow U[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-e^{-jw}} + \pi \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(w-2\pi K)$$

۶) وارونگی زمانی (در تبدیل فوریه گسسته):

$$x[-n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-jw})$$

۷) تغییر مقیاس (بسط زمانی) (در تبدیل فوریه گسسته):

یک درونیابی interpolation که در بین آن صفر قرار داده شود.

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{jw}{a}\right) \qquad a \neq 0$$

$a>1$ انقباض زمانی
$a<1$ انبساط زمانی
$a=-1$ خاصیت ۶

در حالت گسسته a باید عدد صحیح باشد.

$$x_{(K)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{K}\right] & \text{اگر } n \text{ مضرب } K \text{ باشد} \\ 0 & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

بسط داده شده و جای خود داده شده با صفرهای قرار داده شده

برای $a>1$ ارتباطی بین طیف دو سیگنال (دنباله اصلی و دنباله فشرده شده) وجود ندارد.

$$X_{(K)}(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(K)}[n] e^{-jwn} = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} x_{(K)}[n'K] e^{-jw(n'K)}$$

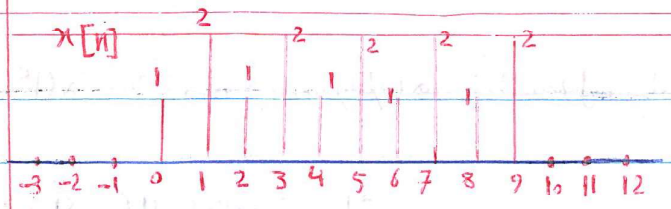
$n = n'K$ یا n یکی از مضرب‌های K است

$$\rightarrow x\left[\frac{n'K}{K}\right]$$

$$X_{(K)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n'] e^{-j(Kw)n'} = X(e^{jwK})$$

(طیف سیگنال فشرده می‌شود.)

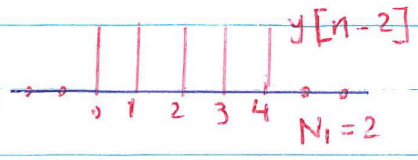
مثال:



سیگنال مستطیلی

$$y[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le N_1 \\ 0 & \text{سایر مواقع} \end{cases}$$

$$Y(e^{jw}) = \frac{\sin(\frac{N_1}{\star} + 0.5)w}{\sin(0.5w)}$$ (توان 2)



$$x[n] = \underbrace{y_{(2)}[n-2]}_{\hookrightarrow z[n]} + 2z[n-1]$$

$$Y_{(2)}(e^{jw}) = \frac{\sin 5w}{\sin w}$$

$$X(e^{jw}) = e^{-jw4} \frac{\sin 5w}{\sin w} + 2e^{-jw5} \frac{\sin 5w}{\sin w}$$

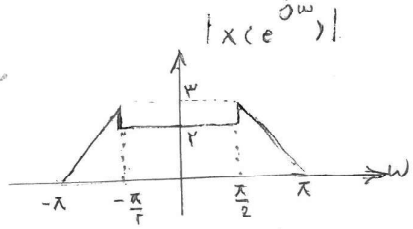
(انتقال استفاده از [4])

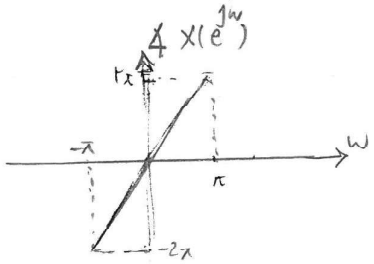
مثال) الف) آیا سیگنال متناوب است یا غیرمتناوب

ب) حقیقی است یا غیرحقیقی

ج) زوج است یا غیرزوج

د) انرژی است یا غیرانرژی





حل) الف) سیگنال فوق متناوب دارای دوره در طیف سیگنال بودن این سیگنال علامت دو

متناوب انرژی نیست ⟸ انرژی آن نامحدود است. در صورتی که از رابطه پارسوال

انرژی این سیگنال محدود است پس سیگنال غیرمتناوب

ب) اندازه طیف = زوج فاز = فرد ⟸ حقیقی است.

ج) سیگنال زوج حقیقی است و فاز ندارد پس سیگنال ⟸ غیر زوج است. ضرب کمی در کمی کمی است پس سیگنال انرژی نیست.

د) انرژی رابطه پارسوال انرژی سیگنال محدود است پس انرژی است.

* ⑨ کانولوشن: $y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})\,H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})$

$$Y(e^{j\omega}) = F\{x[n]*h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(x[k]\,h[n-k])\right]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-k]\,e^{-j\omega n}\right) = H(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,e^{-j\omega k}$$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-k]\,e^{-j\omega n} = H(e^{j\omega})\,e^{-j\omega k}$, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega})$

⟸ به شرط پایداری سیستم‌های LTI همه $|H(e^{j\omega})|$ داریم.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$

مثال) سیستم تأخیر دهنده $h[n] = \delta[n-n_0]$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-n_0]\,e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-n_0]\,e^{-j\omega n_0} = e^{-j\omega n_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n-n_0]$$

$$= e^{-j\omega n_0}$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\,e^{-j\omega n_0} \longrightarrow y[n] = x[n-n_0]$$

مثال: $h[n]=\alpha^n u[n] \quad |\alpha|<1$

$x[n]=\beta^n u[n] \quad |\beta|<1$

$y[n]=?$

$\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} \quad |\alpha|<1$

$\beta^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}} \quad |\beta|<1$

$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)\left(\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}\right)$

اگر $\alpha \neq \beta$ آنگاه $\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\beta e^{-j\omega}}$

$$A = (1-\alpha e^{-j\omega}) Y(e^{j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{1-\beta\alpha^{-1}} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}$$

$$B = (1-\beta e^{-j\omega}) Y(e^{j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{1-\alpha\beta^{-1}} = \frac{\beta}{\beta-\alpha}$$

$$\rightsquigarrow y[n] = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n u[n] + \frac{\beta}{\beta-\alpha}\beta^n u[n] = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})u[n]$$

اگر $\alpha=\beta$ آنگاه $\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$

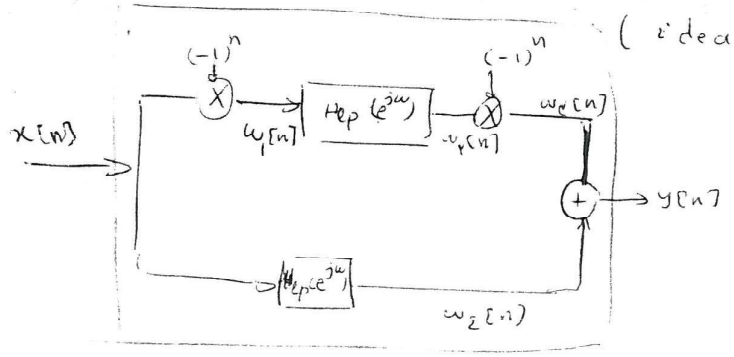
چون $h[n]=0, n<0$ علت

پس $y[n]$ در $n=0$ فقط به $x[n]$ بستگی دارد

مشتق $n\alpha^n u[n] \xleftrightarrow[|\alpha|<1]{F} j\frac{-j\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} = \frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$

$(n+1)\alpha^{n+1}u[n+1] \xleftrightarrow{F} \frac{\alpha}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} \Rightarrow y[n] = (n+1)\alpha^n u[n+1] = (n+1)\alpha^n u[n]$

ساخت فیلتر میان نگذر (ideal band stop filter)



$w_1[n] = x[n]e^{j\pi n} \Rightarrow W_1(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$

$W_2(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$

$w_4[n] = w_3[n]e^{j\pi n} \rightsquigarrow W_4(e^{j\omega}) = W_3(e^{j(\omega-\pi)})$

$W_4(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-2\pi)})H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$

$w_3(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H_{lp}(e^{j\omega})$

$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\underbrace{\left[H_{lp}(e^{j\omega}) + H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})\right]}_{H(e^{j\omega})}$

شنبه ۱۳۹۲/۱۲/۳۰ - ۸۲/۱/۳۰ هفته ۲۰۱۴

ویژگی ضرب در حوزه سیگنال‌های گسسته

$$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(w-\theta)})\,d\theta$$

کانولوشن پریودیک است.

آن اتفاق که در مورد سیگنال پیوسته در حوزه زمان (هر یک از) عمل غیرخطی است.

عمل غیرخطی است.

$$F\{x_1[n]x_2[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]x_2[n]e^{-jwn} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]\left(\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_2(e^{j\theta})e^{j\theta n}\,d\theta\right)e^{-jwn}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_2(e^{j\theta})\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]e^{-j(w-\theta)n}\right)d\theta$$

$x_1(e^{j(w-\theta)})$

مثال:

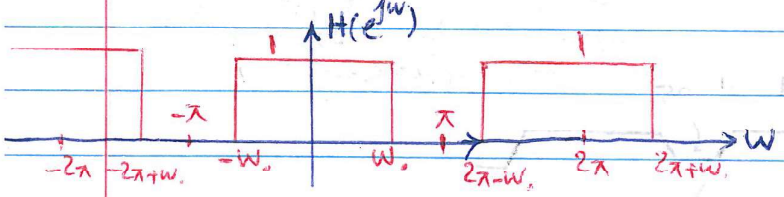
$$F\{x[n]\} = ? \qquad x[n] = x_1[n]x_2[n]$$

سینوسی‌دار از Sinc هستند

$$x_1[n] = \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\pi n} \qquad x_2[n] = \frac{\sin(\frac{3\pi n}{4})}{\pi n}$$

طوف آن حالت فیلتر پایین گذر است.

$$x_1[n] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sinc}(\frac{n}{2}) \qquad x_2[n] = \frac{3}{4}\,\mathrm{Sinc}(\frac{3n}{4})$$



$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} H(e^{jw})e^{jwn}\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-w.}^{w.} e^{jwn}\,dw = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{jwn}}{jn}\right|_{-w.}^{w.}$$

فیلتر پایین گذر است.

$$x[n] = \frac{1}{\pi n}\,\frac{e^{jw.n} - e^{-jwn}}{j2} = \frac{\sin w.n}{\pi n} = \frac{w.}{\pi}\,\mathrm{Sinc}(\frac{w.n}{\pi})$$

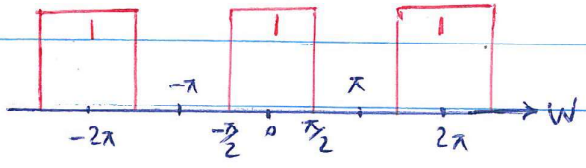
فرکانس قطع فیلتر می‌باشد.

$$x_1[n] \Rightarrow w. = \frac{\pi}{2} \longrightarrow X_1(e^{jw}) = \begin{cases} 1 & 0 \le |w| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |w| \le \pi \end{cases}$$

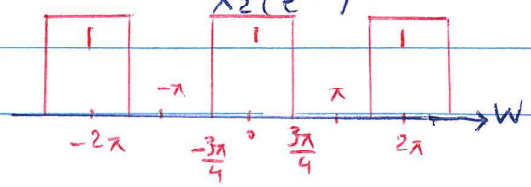
پهنای باند آن دو برابر شده است.

$$x_2[n]: \quad w. = \frac{3\pi}{4} \longrightarrow X_2(e^{jw}) = \begin{cases} 1 & 0 \le |w| \le \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \frac{3\pi}{4} < |w| \le \pi \end{cases}$$

$X_1(e^{jw})$



$X_2(e^{jw})$



نوع غیر پریودیک این سیگنال است

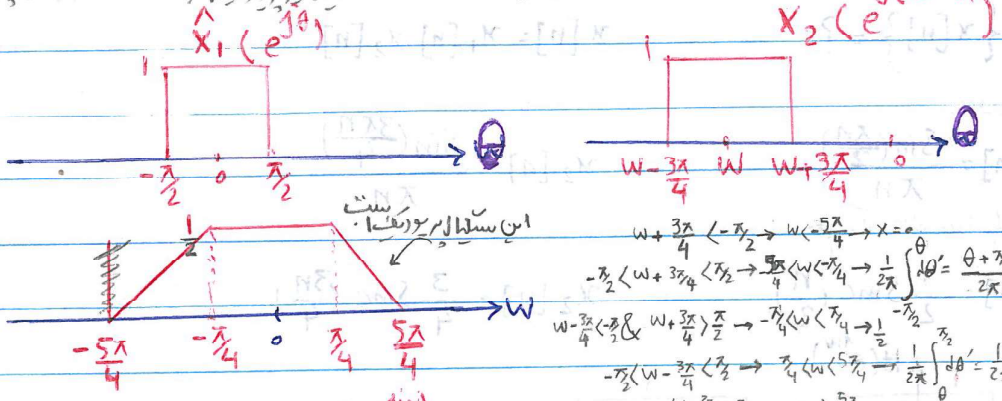
$$\hat{X}_1(e^{jw}) = \begin{cases} X_1(e^{jw}) & |w| < \pi \\ 0 & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})\, X_2(e^{j(w-\theta)})\, d\theta$$

کانولوشن پریودیک است. — بنابراین آن را حل می‌کنیم.

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}_1(e^{j\theta})\, X_2(e^{j(w-\theta)})\, d\theta$$

کانولوشن غیر پریودیک است — سیگنال غیر پریودیک است — سیگنال پریودیک است



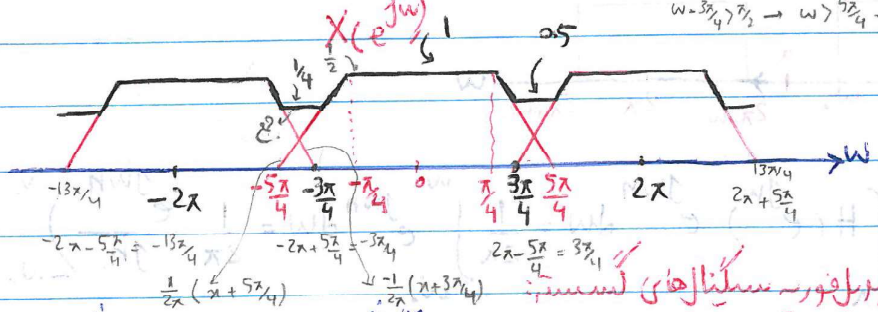
$w+\frac{3\pi}{4} < -\frac{\pi}{2} \rightarrow w < -\frac{5\pi}{4} \rightarrow X = 0$

$-\frac{\pi}{2} < w+\frac{3\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{5\pi}{4} < w < -\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta' = \frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{2\pi}$

$w-\frac{3\pi}{4} < -\frac{\pi}{2}$ & $w+\frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{4} < w < \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \quad -\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < w-\frac{3\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{4} < w < \frac{5\pi}{4} \rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} d\theta' = \frac{1}{2\pi}(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$w-\frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{2} \rightarrow w > \frac{5\pi}{4} \rightarrow X = 0$



خاصیت دوگانی در تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته:

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jw})\, e^{jwn}\, dw$$

برای سیگنال پیوسته متناوب وجود دارد.

سری فوریه

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-j\frac{2\pi k}{T}t}\, dt$$

سیگنال‌های پیوسته

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jkw_0 t}$$

تبدیل فوریه

$$X(jw) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

سیگنال‌های گسسته

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, e^{jkw_0 n}$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jwn}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jw})\, e^{jwn}\, dw$$

سیگنال پیوسته زمانی متناوب با دوره تناوب 2π ← $X(t)$

$x[n] \xleftrightarrow{F}$ سیگنال پیوسته با دوره تناوب 2π است.

می‌توان ضرایب طیفی یک سیگنال پیوسته متناوب تلقی شود.

در این روابط $T = 2\pi$ ، $w_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$

مثال:

$$x[n] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

(سیگنال دلخواه)

می‌توان آن را به منزله ضرایب طیفی یک سیگنال پیوسته در نظر گرفت.

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{jwn} = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[-K]\, e^{jwK} = g(t)$$

t

$$g(t) \xleftrightarrow{FS} a_K = x[-K]$$

$$g(-t) \xleftrightarrow{FS} a_K = x[K]$$

$$a_K = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{-K}{2}\right)$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \pi \end{cases}$$

$$g(t) \xleftrightarrow{FS} a_K = \frac{2T_1}{T}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{KT_1}{\pi}\right) = \frac{T_1}{\pi}\,\mathrm{Sinc}\frac{KT_1}{\pi}$$

(2π)

$$T_1 = \frac{\pi}{2} \rightarrow g(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |t| < \pi \end{cases} = X(t)$$

$$X(e^{jw}) = \begin{cases} 1 & |w| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |w| < \pi \end{cases}$$

$n \rightarrow K$

$-n \rightarrow -K$

$t \rightarrow w$

معکوس سری فوریه

شنبه ۸۲/۲/۶ - ۲۰۰۳/۴/۲۶

سیستم‌های LTI قابل توصیف با معادلات دیفرنس خطی با ضرایب ثابت:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

با فرض پایداری سیستم پاسخ فرکانسی سیستم وجود دارد. از طرفین تساوی فوق تبدیل فوریه گرفته از خاصیت خطی بودن آن استفاده می‌کنیم.

فرض پایداری سیستم لحاظ می‌شود. ← شرط لازم برای وجود پاسخ فرکانسی سیستم

$$\sum_{k=0}^{N} a_k F\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^{M} b_k F\{x[n-k]\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Y(e^{j\omega}) e^{-jk\omega} = \sum_{k=0}^{M} b_k X(e^{j\omega}) e^{-jk\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

آرگومان آن $e^{-j\omega}$ می‌باشد

پاسخ فرکانسی گویا است.

آرگومان چند جمله‌ای آن $e^{-j\omega}$ است.

به جای سیگنال ورودی

با تجزیه کسر به کسرهای ساده می‌توان به $h[n]$ رسید.

مثال:

$$y[n] - a y[n-1] = x[n] \quad , \quad |a| < 1$$

$$Y(e^{j\omega}) - a Y(e^{j\omega}) e^{-j\omega} = X(e^{j\omega})$$

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} = H(e^{j\omega}) \longrightarrow h[n] = a^n u[n]$$